Government of Tamilnadu

حساب

MATHEMATICS - URDU

دسویں جماعت کے لئے

X - STANDARD

Untouchability
Inhuman- Crime

Department of School Education

A Publication Under
Government of Tamilnadu
Distribution of Free Textbook Programme
(NOT FOR SALE)

First Edition - 2011
(This Book is published under Uniform System of School Education scheme)

TRANSLATORS

S. ABDUR RAHMAN
Asst. Headmaster,
Islamiah Boys' Higher Secondary School,
Vaniyambadi, Vellore District.

MOHAMED JAWEED AKRAM
B.T. Assistant,
Islamiah Boys' Higher Secondary School,
Vaniyambadi, Vellore District.

T. SIDDIQUA
B.T. Assistant,
Islamiah Girls' Higher Secondary School,
Vaniyambadi, Vellore District.

M. FAREEDA BANU
B.T. Assistant,
Islamiah Girls' Higher Secondary School,
Vaniyambadi, Vellore District.

Laser Typeset
Urdu Computer, Vaniyambadi.

Layout and Wrapper Design:
V. James Abraham

Textbook Printing
Tamilnadu Textbook Corporation,
College Road, Chennai - 600 006.

Price : Rs.

This book has been printed on 80 G.S.M. Maplitho Paper

Printed by Offset at :

پیش لفظ

یہ بڑی مسرت آمیز بات ہے کہ ٹمل ناڈو میں عمومی طور پر تعلیم اور خصوصی طور پر اسکول کی تعلیم میں نمایاں تبدیلی ہوئی ہے ،جس کی وجہ سے یکساں نظام تعلیم عمل میں آیا۔ ٹمل ناڈو میں تعلیم کی ترقی کے لئے حکومت ٹمل ناڈو کی جانب سے ایک سنہری موقع عطا کیا گیا ہے جس کا ہم مکمل فائدہ اٹھائیں۔

ریاضیات، جو تمام علوم سائنس کی ملکہ ہے،اور ہمیشہ ایک دلکش موضوع بنی ہوئی ہے، ہمیشہ اپنے اندر ایک ذاتی قیمت رکھتی ہے۔ یہ سائنس، انجینئرنگ اور دوسرے اسباق میں اہم رول ادا کرتی ہے۔ اس لئے سائنس اور ٹکنالوجی کی ترقی کے لئے علم ریاضی کی ضرورت ہے اور کسی بھی فرد کو اس کے پسندیدہ میدان میں ترقی کرنے کے لئے بھی ریاضی معلومات درکار ہیں۔ اس کے علاوہ سخت کاوش ومحنت سے کسی شخص کو نہ صرف ریاضیات کا گہرا علم حاصل ہوتا ہے بلکہ اس کو صحیح طور پر سوچنے سمجھنے کی صلاحیت اور الجھے ہوئے مسئلوں کا تجربہ کرنے میں مدد ملتی ہے۔

تروولّو ورجو ٹمل زبان کے الہامی شاعر تھے،انہوں نے دو ہزار سال پہلے ریاضی تعلیم کی اہمیت کو ظاہر کرتے ہوئے کہا تھا

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு - குறள் (392)

منظوم ترجمہ:

اک ''عدد'' ہے حساب کی بنیاد — دوسرا ''لفظ'' جس سے کہہ پائیں
نسلِ آدم جو اس زمیں پر ہے — درحقیقت یہ اس کی دو آنکھیں

(تروکرل:392) ترجمہ: مختار بدری

علم ریاضی کی صلاحیت کی بدولت ہماری زندگی میں ہمیشہ پیش آنے والے پیچیدہ مسئلوں کا حل ڈھونڈ سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ علمِ ریاضی ایک زبردست تخلیقی قوت ہے اور یہ صرف مسئلوں کو حل کرنے کا آلۂ کار نہیں ہے۔ اس علم کے حاصل کرنے والے اس حقیقت کو جان جائیں گے اور جیسے جیسے وہ زیادہ سے زیادہ علم ریاضی حاصل کریں گے ان کو پورا اطمینان حاصل ہوگا۔

اس کے علاوہ آئندہ نسلوں کی فلاح و بہودی کے لئے ریاضیات کی مشق کی بہت ضرورت ہے۔ اسکول کی سطح میں حاصل کئے ہوئے بنیادی ریاضی معلومات آگے چل کر ریاضی اور دوسرے سائنس کے میدانوں کی بنیاد بنتی ہیں۔ ریاضی کا بنیادی علم سیکھنے کے علاوہ یہ جاننا بھی ضروری ہے کہ ان کو مسئلوں کے حل کرنے میں کس طرح استعمال کیا جاتا ہے۔

بنیادی اصول کو اچھی طرح سمجھنا اور مسئلوں کا حل ڈھونڈنا علمِ ریاضی کے سیکھنے کے دو اہم مشتمل حصے ہیں۔ یہ کتاب اُس رخ کا پہلا قدم ہے۔ اس سے طالبِ علم کو علم ریاضی کی بنیاد کو اخذ کرنے اور ان کے ذریعہ مسئلوں کو حل کرنے میں مدد ملے گی۔ اس حصولِ مقصد کو مدنظر رکھتے ہوئے بابوں کو فطری اور منطقی ترتیب دی گئی ہے جن میں کافی حل کردہ مثالیں شامل ہیں۔ ہر باب اس طرح سے بنایا کیا گیا ہے جس سے طالبِ علم کو ان نظریات (concept) کو اچھی طرح سمجھنے میں کافی ضروری مشق دی گئی ہے۔ ان مسئلوں کو حل کرنے سے پہلے ہم یہ صلاح دیتے ہیں کہ اساتذہ اور طلباء دونوں ان مسئلوں میں استعمال ہونے والے ریاضی نظریات سے اچھی طرح واقفیت حاصل کرلیں۔

تاہم یہ بھی ذہن نشین کرلیں کہ علمِ ریاضی اعداد کی سائنس کے علاوہ بھی بہت کچھ ہے۔ کلاس روم میں استاد کی اہمیت بہت زیادہ ہے جس کی مدد اور رہنمائی سے علمِ ریاضی سیکھی جاتی ہے۔ بنیادی ریاضی سے اعلیٰ ریاضی حاصل کرنے کے درجہ کو عبور کرنے میں استاد ایک اہم رول ادا کرتا ہے۔ اس ضمن میں ہم یقین کرتے ہیں کہ یہ کتاب اس مقصد کو حاصل کرنے میں کارآمد ثابت ہوگی۔ اس سے انتہائی فائدہ حاصل کرنے کے لئے استاد کو ضروری طور پر دوطرفہ بات چیت سے کام لینا پڑے گا۔ یہ جدوجہد بغیر کسی شک کے کلاس روم میں طالب علم کو مدِ نظر رکھتے ہوئے سرگرمیوں میں حصّہ لینے کا سبب بنیں گی۔ نیز اس کتاب کی مدد سے طالبِ علم کو علمِ ریاضی کا گہرا مطالعہ کرنے اور اپنی مہارت میں اضافہ کرنے کا موقعہ ملے گا۔ ہم پہلے ہی بتا چکے ہیں کہ ریاضی کے سیکھنے کے دو حصے ہیں۔ ایک اس کی بنیادی اصولوں کو سیکھنا اور ان اصولوں کو مسئلوں کے حل کرنے میں استعمال کرنا۔ لیکن ان اصولوں کو سیکھنے اور مشق میں دے گئے مسئلوں کو خود سے حل کرنے اور استاد کی مدد سے اس قسم کے نئے مسئلوں کی تخلیق کرنے سے طالبِ علم کے حسابی معلومات کو استحکام حاصل ہوتا ہے۔

ریاضی کی مشق سے ہم ریاضی سیکھتے ہیں۔

اس کتاب کو مزید بہتر بنانے کے لئے ہم ماہرین تعلیم، اساتذہ اور طلباء کے مفید مشوروں اور تنقیدی تبصروں کا ہم تہہ دل سے استقبال کرتے ہیں۔

آر۔ مورتی

چیرپرسن

پیریڈ کی تعداد	تعلیمی کاروائی کا طریقہ	متوقع سیکھنے کے نتائج	اسباق	موضوع
26	تمام مثالوں کے لئے ون کے خاکوں کا استعمال کیجئے۔ تفاعلات کی مثالیں معاشیات، علمِ طب اور سائنس سے دیجئے۔	• سٹ پر کارروائی عمل کے بنیادی نظریات کا اعادہ کرنا • سٹ پر کارروائی عمل کو سمجھنا۔ • متبادلت، تقسیمیت جو تین مجموعوں تک محدود ہے • سٹوں کی اتمامیت کے اصولوں کو سمجھنا۔ • ڈی مارگن کے کلیوں کو سمجھنا اور ون نقشوں سے ان کی وضاحت کرنا۔ • الفاظی مسئلوں کو ضابطہ کے ذریعہ اور ون نقشوں کے ذریعہ حل کرنا۔ • تفاعلات کی توضیح، ان کے اقسام ان کی نمائندگی کرنا آسان مثالوں کے ذریعہ تفاعلات کی اقسام کو سمجھنا	(i) تعارف (ii) سٹ پر کارروائی عمل کی خصوصیات (iii) مثالوں اور ون نقشوں کے ذریعہ ڈی مارگن کے کلیوں کی تصدیق (iv) $n(A\cup B\cup C)$ کا ضابطہ (v) تفاعلات	I ۔ سٹ اور تفاعلات
27	نمونہ کا طریقہ استعمال کریں۔ نقاط کے نمونے کو سکھانے کے لئے استعمال کریں۔ ضابطہ کے حصول کے لئے نمونہ استعمال کریں۔ حقیقی زندگی کے موقعوں سے مثالیں پیش کریں۔ واضح کرنے والی مثالیں۔	• حسابی سلسلوں اور ہندسی سلسلوں کو سمجھنا اور ان کی نشاندہی کرنا • حسابی سلسلوں اور ہندسی سلسلوں کے استعمال سے n ویں رقم معلوم کرنا • حسابی سلسلوں اور ہندسی سلسلوں کے n رقموں کا حاصلِ جمع معلوم کرنا • چند محدود تواتر کا مجموعہ معلوم کرنا	(i) تعارف (ii) سلسلے (iii) حسابی سلسلے (A.P) (iv) ہندسی سلسلے (G.P) (v) تواتر	II ۔ حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے
	سکھانے کے لئے نقشوں کی مدد لیں۔ ابتداء میں اعداد کے GCD اور LCM کو دوبارہ یاد دلائیں۔ کسروں پر طرزِ عمل سے موازنہ کیجئے۔	• دو نامعلوم متغیرات کے خطی مساوات کے متعلق تصوّر قائم کرنا ایک جوڑی، دو نامعلوم خطی مساوات کا حل اخراج کے طریقے اور ترچھی ضرب کے طریقہ سے معلوم کرنا۔ صفر اور کثیر رقمیات کے ضریب کا تعلق خصوصاً دو درجی کثیر رقمیات کے حوالہ سے سمجھنا۔ • دی ہوئی کثیر رقمی کا خارج قسمت اور بچت ترکیبی تقسیم کے طریقہ سے معلوم کرنا۔ ترکیبی تقسیم کے طریقے سے دی ہوئی کثیر رقمی کا اجزائے ضربی معلوم کرنا۔ کثیر رقمی عبارتوں کے G.C.D اور L.C.M کے فرق کو پہچاننا۔ ناطق عبارتوں کو مختصر کرنے کے قابل بنانا (آسان مسئلے)	(i) خطی مساوات کا حل کرنا (ii) کثیر رقمیات (iii) ترکیبی تقسیم (iv) مقسوم علیہ اعظم (G.C.D) اور ذواضعافِ اقل (L.C.M) (v) ناطق عبارتیں	III ۔ الجبرا

III - الجبرا	(vi) جذرالمربع (vii) دودرجی مساوات	جذرالمربع کو سمجھنا۔ دودرجی مساوات کی معیاری شکل کو سمجھنا۔ دودرجی مساوات کو حل کرنا (جن کے اصل حقیقی ہیں) اجزائے ضربی کا طریقہ، مربع کو مکمل کا طریقہ اور دودرجی ضابطہ کے طریقے سے۔ دودرجی مساوات پر مختصر لفظی مسئلوں کو حل کرنے کے قابل بنانا۔ ممیز (Discriminant) اور جذر کی نوعیتوں کے درمیانی تعلق کو جوڑنا دئے ہوئے جذروں کی مدد سے دودرجی مساوات بنانا	اعداد پر جذرالمربع کے عمل سے موازنہ کیجئے جذروں کی نوعیت کو الجبریائی اور ترسیمی طریقے سے سمجھنا	40
IV_ میٹرکس	تعارف میٹریس کے اقسام جمع اور تعریف ضرب میٹرکس کی مساوات	میٹریس کی بناوٹ اور ترتیب کو پہچاننا۔ میٹریس کے اقسام کو پہچاننا۔ دی ہوئی میٹریس کو جمع اور تفریق کرنا۔ ایک میٹرکس کو عددیہ (scalar) سے ضرب دینا اور میٹرکس کا ٹرانسپوز معلوم کرنا۔ دئے ہوئے میٹریسوں کو ضرب دینا۔ (2 × 2, 2 × 3, 3 × 2 میٹریس) دو متغیرات کی مساواتوں کا حل میٹرکس کے طریقہ سے کرنا۔	اعداد کے مستطیلی صف بندی کا استعمال۔ حقیقی زندگی کے حالات کا استعمال۔ حسابی عمل کو استعمال کرنا ہوگا۔	16
V_ محددی علم ہندسہ	(i) تعارف (ii) اعادہ : دونقاط کا درمیانی فاصلہ (iii) تقسیمی ضابطہ، وسطی نقطہ کا ضابطہ، ہندسی مرکز کا ضابطہ (iv) مثلث اور چار ضلعی کا رقبہ (v) خطِ مستقیم	دونقاط کے درمیانی فاصلے کو دوبارہ یاد دلانا اور دئے ہوئے دونقطوں کے وسطی نقطہ کو معلوم کرنا تقسیمی ضابطہ کی مدد سے تقسیم کرنے کا نقطہ معلوم کرنا شاث کا رقبہ محسوب کرنا دونقاط کی مدد سے یا مساوات کی مدد سے میلان معلوم کرنا خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا : میلان۔مقطوعہ کی شکل میں : میلان۔ نقطہ کی شکل میں، دو۔نقاط کی شکل میں مقطوعات کی شکل میں ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو دی ہوئی خطِ مستقیم کے (i) متوازی ہو۔ (ii) عمودی ہو۔	مثلث اور چار ضلعی کے آسان ہندسی نتائج کی تصدیق بطورِ استعمال (application) کرنا ابتدائی مرحلہ کے طور پر $y = mx + c$ کی شکل کا استعمال کریں	2

علم ہندسہ - VI	(i) بنیادی تناسب کا مسئلہ (ثبوت کا ساتھ) (ii) بنیادی تناسب کے مسئلہ کا برعکس (ثبوت کے ساتھ) (iii) ناصفِ زاویہ کا مسئلہ (ثبوت کے ساتھ۔صرف اندرونی صورت) (iv) ناصف زاویہ کا برعکس ثبوت کے ساتھ (صرف اندرونی صورت) (v) متشابہ مثلثیں (بغیر ثبوت کے مسئلے)	مسئلوں کو سمجھنا اوران کو استعمال کر کے آسان حسابات کا حل کرنا	تناسب طریقہ سے کاغذ تہہ کرنے کے طریقے، تبدیلی (Transformation) تکنیک کا استعمال باضابطہ ثبوت پیش کرنا نقشوں کو کھینچنا بتدریج منطقی ثبوت نقشوں کے ذریعہ تشریح کرنا اور بحث کرنا	20
علم مثلث - VII	(i) تعارف (ii) متماثلات (iii) بلندیاں اور فاصلے	علمِ مثلث کے متماثلات کو پہچاننا اوران کو آسان مسئلوں میں استعمال کرنا۔ علمِ مثلث کی نسبتوں کو سمجھنا اوران کے استعمال سے بلندیاں اور فاصلے محسوب کرنا۔ (دو قائمۃ الزاویہ مثلث سے زیادہ نہیں)	الجبریائی ضابطہ کے استعمال سے۔ علمِ مثلث کے متماثلات کے استعمال سے۔	21
مساحت VIII	تعارف استوانہ، مخروط، کرّہ، نصف کرّہ اور مخروط کے مخطوعہ کا سطحی رقبہ اور حجم مخلوط شکلوں کا سطحی رقبہ اور حجم غیر متبادلوں کا حجم	استوانہ، مخروط، کرّہ، نصف کرّہ اور مخروط کے مقطوعہ کا سطحی رقبہ اور مجموعوں کا دریافت کرنا مخلوط اجسام (صرف دو) کا سطحی رقبہ اور حجم دریافت کرنا چند مسئلوں کے مستقل مجموعی کو محدود رکھا گیا ہے۔	قیمتوں کے تقریبی نوعیت کی وضاحت کرنا۔ مخلوط شکلوں کو بنانے کے لئے 3D ماڈلوں کا استعمال کرو۔	24
عملی علمِ ہندسہ - IX	(i) تعارف (ii) دائرہ پر مماسوں کا بنانا (iii) مثلثوں کا بنانا (iv) مدوّر چار ضلعی کا بنانا	دائروں پر مماس کے بنانے کے قابل ہونا قاعدہ، راس کا زاویہ اور مقابل کے راس اور (i) خطِ وسطی (ii) ارتفاع کی مدد سے مثلث کے بنانے کے قابل ہونا مدوّر چار ضلعی بنانے کے قابل ہونا۔	مماس کی لمبائی کی تصدیق کے لئے الجبرائی طریقہ کا تعارف کرانا مثلث بنانے سے پہلے دائروں سے متعلق زاویوں کے خصوصیات کا یاد دلانا۔ نظریاتی علمِ ہندسہ میں سے مناسب مسئلوں کو یاد دلائیں۔	15

X_ ترسیم	(i) تعارف (ii) دودرجی ترسیم (iii) چند مقصوص ترسیم	ترسیم کے ذریعہ دودرجی مساوات کوحل کرنے کے قابل ہونا۔ لفظی مسئلوں کوحل کرنے کے لئے ترسیم کواستعمال کرنے کے قابل ہونا۔	دودرجی مساوات کی ترسیم کے ذریعہ الجبریائی مفہوم کے سمجھنے کا بھی دھیان رکھا جائے۔ حقیقی زندگی کے حالات سے تعارف کرایا جائے ۔	10
XI_ شماریات	(i) مرکزی رجحان کی پیمائشوں کودوبارہ یاددلائیں۔ (ii) انتشار کی پیمائش (iii) تغیرات کا ضریب	گروہی اور غیر گروہی معطیات کے اوسط کودوبارہ یاددلانا انتشار (Dispersion) کے نظریہ کوسمجھنا اور وسعت۔ معیاری انحراف اور اختلاف (Variance) کے نظریہ کوسمجھنا۔	حقیقی زندگی کے حالات کو استعمال کیجئے۔ جیسے امتحانات، اسپورٹس وغیرہ میں کارگردگی	16
XII_ امکان	(i) تعارف (ii) امکان ۔ نظریاتی پہنچ (iii) امکان میں جمع کا مسئلہ	تغیرات کے ضریب کومحسوب کرنے کے قابل ہونا۔ سربجی تجربہ، نظیری عرصہ، موقع کوسمجھنا۔ باہم اخراجی، اتمامی یقینی اور ناممکن مواقع امکان میں جمع کے مسئلہ کوسمجھنا اور اس کے استعمال سے چند آسان مسئلوں کوحل کرنا	خاکے اور سکّوں کے اچھالنے، پانسوں کے پھینکنے اور تاش کی گڈی سے ایک کارڈ کے نکالنے میں تفتیش یا تحقیق کریں	15

فہرست

ست اور تفاعلات

SETS AND FUNCTIONS

1

A set is Many that allows itself to be thought of as a One.
- George Cantor

- تمہید
- ست
- مجموعوں پر اعمال کی خصوصیات
- ڈی مارگن کے اصول
- تفاعلات

1.1۔ تمہید

ریاضی میں مجموعہ یا ست کا تصوّر ایک بنیادی تصوّر ہے۔ ریاضی کی ہر شاخ اور ہر حِصّہ میں ست تھیوری کی ترقیم اور اصطلاحات استعمال ہوتے ہیں۔ چنانچہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ست تھیوری ریاضیات کی زبان ہے۔ یہ باب جارج بولے (George Boole) (1815 - 1864) اور جارج کینٹر (George Cantor) (1845 - 1918) کی کاوشوں کا نتیجہ ہے جو 19 ویں صدی کے بعد میں وجود میں آیا۔ 20 ویں صدی میں ریاضی کے تمام ابواب کی ترقی کے دوران اس نظریہ بہت زیادہ اثراندوز رہا۔ کئی غیر منسلک خیالات کو جوڑنے میں یہ کارآمد رہا اور اسطرح ریاضی کی ترقی آسان ہوگئی۔

نویں جماعت میں ہم نے ست یا مجموعہ کا تصوّر پڑھا ہے۔ چند عمل جیسے اتحاد، تقاطع، اور دوستوں کا فرق وغیرہ۔ یہاں ہم بعض اور تصوّرات کے متعلق سیکھیں گے جو مجموعے سے متعلق ہیں اور ایک دوسرا اہم تصوّر ریاضی میں تفاعلات (functions) سے متعلق ہے۔ پہلے ہم چند مثالوں کی مدد سے ان بنیادی تصوّرات کا اعادہ کریں گے۔ ہم تمام مثبت سالم اعداد کو N سے اور تمام حقیقی اعداد کو R سے تعبیر کرتے ہیں۔

جارج بولے
(1815-1864)
انگلستان

یہ کہا جاتا ہے کہ منطقی علامات اور الجبریائی علامات کے درمیان قریبی تعلق ہے۔ اس نے حسابی علامات کو منطقی تعلقات کے اظہار کے لئے استعمال کیا۔ حالانکہ اس وقت کمپیوٹر نہیں تھا۔ بولے کی الجبرا ہی کمپیوٹر کی ریاضیات کی بنیاد بنی۔

چونکہ کمپیوٹر کے ریاضیات کی بنیاد بولے کی جدید منطق سے ہوئی، اسے کمپیوٹر سائنس کے میدان کا بانی کہا جاتا ہے۔

1.2۔ ست یا مجموعہ Sets

تعریف

خوب واضح اشیاء کا مجموعہ ایک ست کہلاتا ہے۔
ست کے اشیاء اُس ست کے عناصر بھی کہلاتے ہیں۔

یہاں "خوب واضح" سے مُراد ہے کہ ایک شئے مجموعہ سے تعلق رکھتی ہے یا نہیں اسکا فیصلہ بغیر کسی اُلجھن کے اچھی طرح واضح ہو۔

مثلاً "چنئی میں تمام اونچے آدمیوں کا مجموعہ" ایک ست نہیں ہے کیونکہ یہاں جو فیصلہ کا اصول "اونچے آدمی" اچھی طرح واضح نہیں ہے چنانچہ یہ ایک ست کو واضح نہیں کرتا ہے۔

ترقیم (Notation)

عام طور پر ہم ایک سٹ کو انگریزی کے حروف جلی (Capital letter) مثلاً A ، B ، X, وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ سٹ کے ہر ایک عنصر کو حروف خفی (small letters) x ، y وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $x \in Y$ لکھتے ہیں تو اسکا مطلب ہے x مجموعہ Y کا ایک عنصر ہے۔ $t \notin Y$ لکھتے ہیں تو مطلب ہے کہ t مجموعہ Y کا عنصر نہیں ہے۔

مثالیں : (Examples)

(i) ٹمل ناڈو میں تمام ہائی اسکول کے طلباء کا سٹ

(ii) ٹمل ناڈو میں ہائی اسکول یا کالج کے تمام طلباء کا سٹ

(iii) تمام مثبت جفت سالم اعداد کا مجموعہ یا سٹ

(iv) تمام سالم اعداد کا سٹ جنکا مربع منفی ہے

(v) چاند پر جو لوگ پہنچے تھے ان تمام کا مجموعہ

فرض کرو کہ A ، B ، C ، D اور E بالترتیب (i)،(ii)،(iii)،(iv)،(v) میں واضح سٹ کو ظاہر کرتے ہیں۔

غور کریں کہ کسی بھی صحیح سالم عدد کا مربع ایک سالم صحیح عدد ہے جو صفر یا مثبت ہوتا ہے۔ اسلئے کوئی صحیح عدد ایسا نہیں ہے جسکا مربع منفی ہوتا ہے۔ چنانچہ سٹ D میں کوئی بھی عنصر نہیں ہے۔ اسطرح کے مجموعے کو خالی مجموعہ کہتے ہیں۔ ہم **خالی مجموعہ** یا سٹ کو ϕ سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف

(i) ایک مجموعے کو **محدود مجموعہ** کہا جاتا ہے اگر وہ صرف محدود عناصر رکھتا ہو۔

(ii) ایک مجموعہ جو محدود نہیں ہے **"لامحدود مجموعہ"** کہلاتا ہے۔

غور کرو کہ اوپر دیا گیا سٹ A محدود سٹ ہے جبکہ سٹ C لامحدود سٹ ہے۔ غور کرو کہ خالی سٹ میں کوئی بھی عنصر نہیں ہے۔ یعنی خالی سٹ میں عناصر کی تعداد صفر ہے۔ لہٰذا خالی سٹ بھی ایک محدود سٹ ہے۔

تعریف

(i) اگر مجموعہ X محدود ہو تو ہم X کی **بنیادیت** (Cardinality) یا اصلیت کی تعریف یوں کرتے ہیں "X میں عناصر کی تعداد ہے"۔ سٹ X کے بنیادی عدد کو $n(X)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) اگر ایک سٹ X لامحدود ہے تو ہم اس کی بنیادیت کو ∞ نشان سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اوپر دی گئی مثالوں میں A ، B سٹوں کو دیکھئے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ A ہر کا ایک عنصر B کا بھی عنصر ہے۔ ایسی حالتوں میں ہم کہتے ہیں B کا تحتی سٹ A ہے۔

ہم IX ویں کلاس میں سیکھے ہوئے چند بیانات (definition) کا اعادہ کریں گے۔

تحتی سٹ : (Subset) فرض کرو کہ X ، Y دو سٹ ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ Y کا **تحتی مجموعہ** X ہے اگر X کا ہر عنصر Y کا بھی عنصر ہو۔ یعنی X ، Y کا تحتی سٹ ہے اگر $z \in X$ کا مفہوم $z \in Y$

اگر X ، Y کا تحتی سٹ ہو تو اسکو $X \subseteq Y$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ ہر ایک سٹ خود اپنے سٹ کا تحتی سٹ ہے۔

مجموعوں کی مساوات (Set equality) : دو مجموعے X ، Y مساوی کہلاتے ہیں اگر دونوں ٹھیک طور پر مساوی عناصر رکھتے ہوں۔
ایسی حالت میں ہم اسکو $X = Y$ لکھتے ہیں۔ یعنی $X = Y$ اگر صرف اور صرف $Y \subseteq X$ اور $X \subseteq Y$ ہو۔

معادل سٹ (Equivalent sets) : X, Y دو محدود سٹوں کو معادل سٹ بھی کہتے ہیں اگر $n(X) = n(Y)$ ہے۔
مثال کے طور پر فرض کرو کہ $P = \{x/x^2-x-6=0\}$ اور $Q = \{3,-2\}$ ۔ یہ آسانی سے دیکھا جاتا ہے کہ دونوں P, Q مساوی عناصر رکھتے ہیں اور اسلئے $P = Q$ اگر $F = \{3,2\}$ ہو تو F, Q معادل سٹ ہیں مگر $Q \neq F$

قوتی سٹ (Power set) : A دیا گیا مجموعہ ہے۔فرض کرو کہ $P(A)$ ، A کے تمام تحتی سٹوں کا ذخیرہ ہے $P(A)$ کو A کا **قوتی سٹ** کہا جاتا ہے۔ اگر $n(A)=m$ اور ہو تو $P(A)$ میں عناصر کی تعداد کو $n[P(A)]=2^m$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
مثال کے طور پر اگر $A = \{a, b, c)$ ہو تو
$P(A) = \{\phi,\{a\},\{b\}\{c\}.\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$ اور $n[P(A)]=8$

اب دو سٹ دیئے گئے ہیں۔ہم کس طرح دیئے گئے سٹوں کے استعمال سے نئے سٹ بنا سکتے ہیں ؟
ایک امکان یہ ہے کہ دونوں سٹوں کے تمام عناصر مِلا کر ایک نیا سٹ بنا سکتے ہیں۔دوسرا امکان یہ ہے کہ دونوں سٹوں سے صرف مشترک عناصر لے کر ایک سٹ بنا سکتے ہیں۔نیز ہم ایک ایسا سٹ بنا سکتے ہیں جس میں ایک سٹ کے عناصر ایسے ہوں جو دوسرے سٹ میں نہ ہوں۔
اِنکی مختصر طور پر تشکیل ذیل کے بیانات میں دی گئی ہے۔ہم نے ہر ایک تعریف کی وضاحت کیلئے وِن کے خاکوں کو شامل کیا ہے۔

1.3 سٹوں پر عمل (Operations on Sets) :

فرض کرو کہ X ، Y دو سٹ ہیں۔ہم ذیل میں نئے سٹوں کی تعریف یوں کرتے ہیں۔

(i) اتحاد (Union) $X \cup Y = \{ z/z \in X \text{ or } z \in Y\}$,
("X اتحاد Y" پڑھتے ہیں)
(غور کرو کہ $X \cup Y$ میں X کے تمام عناصر اور Y کے تمام عناصر شامل ہیں اور خاکہ 1.1 اسکی وضاحت کرتا ہے) $X \subseteq X \cup Y$ اور $Y \subseteq X \cup Y$ دونوں واضح ہیں۔

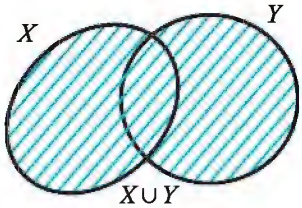


Fig. 1.1

(ii) تقاطع (Intersection) $X \cap Y = \{ z/z \in X \text{ or } z \in Y\}$,
("X تقاطع Y" پڑھتے ہیں)
(غور کرو کہ $X \cap Y$ میں صرف وہ عناصر ہیں جو X اور Y دونوں کے ہیں اور خاکہ 1.2 اسکی وضاحت کرتا ہے) $X \cap Y \subseteq X$ اور $X \cap Y \subseteq Y$ دونوں واضح ہیں۔

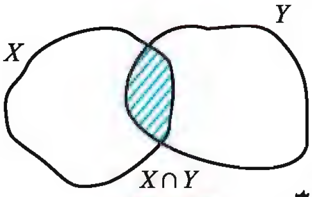


Fig. 1.2

(iii) سٹوں کا فرق (Set difference) $X / Y = \{ z/z \in X \text{ or } z \notin Y\}$,
("X فرق Y" پڑھتے ہیں)
(غور کرو کہ $X \setminus Y$ میں X کے ایسے عناصر ہیں جو Y نہیں ہیں اور خاکہ 1.3 اسکی وضاحت کرتا ہے۔نیز $A \setminus B$ کو $A - B$ لکھتے ہیں۔ہم یہاں $A \setminus B$ استعمال کر سکتے ہیں جو ترقیم وسیع طور پر ریاضی میں استعمال کی گئی ہے)

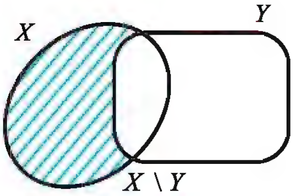


Fig. 1.3

(iv) متشاکل فرق (Symmetric difference) $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$
("X متشاکل ہے Y" پڑھتے ہیں)
غور کرو کہ $X \Delta Y$ میں $X \cup Y$ کے تمام عناصر ہیں جو $X \cap Y$ میں نہیں ہیں۔

Fig. 1.4

(v) متمم سٹ (Complement Sets) : اگر $X \subseteq U$ جہاں U ہمہ گیر سٹ ہے

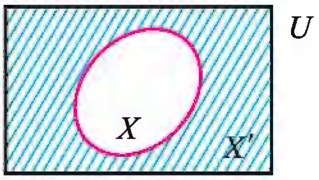


Fig. 1.5

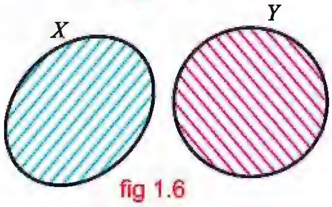


fig 1.6

تو U \ X کو X کا متمّم U کے تحت کہتے ہیں۔
اگر ماتحت ہمہ گیر مجموعہ ثابت یا غیر تغیّر پذیر ہو تو ہم U \ X کو X' سے ظاہر کرتے ہیں اور اسکو X کا متمّم کہتے ہیں۔

(vi) غیر منسلک یا جُدا سٹ (Disjoint Sets)

دو سٹ X اور Y غیر منسلک یا جُدا کہلاتے ہیں اگر ان میں کوئی بھی مشترک عنصر نہ ہو۔
یعنی اگر $X \cap Y = \phi$ ہو تو X اور Y جُدا کہلاتے ہیں۔
صاف طور پر n(AUB)=n(A)+n(B) ہے۔ اگر A اور B جدا محدود مجموعے ہیں۔

برائے ذہن نشینی

عام طور پر ون نقشوں کو ظاہر کرنے کے لئے دائرے استعمال کئے جاتے ہیں۔ جب کہ کوئی بھی بند منحنی کو ون نقشہ میں ایک سٹ کے طور پر ظاہر کر سکتے ہیں۔ ایک سٹ کے عناصر کو لکھتے وقت، ہم عناصر کو دہرانے نہیں دیتے۔

اب ہم یہاں چند مثالیں دیکھیں گے۔

فرض کرو کہ $A = \{x \mid x$ 12 سے کم مثبت سالم عدد ہے$\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$
اور $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$ اب ہم مندرجۂ ذیل دریافت کرتے ہیں۔

(i) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
$= \{x \mid x$ ہے x سے کم مثبت سالم عدد 12 یا $x = 12$ یا $15\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$

(ii) $C \cap B = \{y \mid y \in C$ اور $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A \setminus C = \{x \mid x \in A$ مگر $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$
$\{2,4,6,8,9,10,11\} \cup \{-2,-1,0\} = \{-2,-1,0,2,4,6,8,9,10,11\}$

(v) فرض کرو کہ $U = \{x \mid x$ ایک سالم عدد ہے$\}$ ایک ہمہ گیر مجموعہ ہے۔
غور کرو کہ 0 نا تو مثبت ہے اور نہ منفی اسلئے $0 \notin A$
اب $A' = U \setminus A = \{x \mid x$ ایک سالم عدد ہے مگر A میں نہیں ہونا چاہئے$\}$
$= \{x \mid x$ ہے یا منفی سالم عدد ہے 0 یا تو 12 کے مساوی یا بڑا مثبت سالم عدد$\}$
$= \{\cdots -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \ldots\}$
$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

ہم یہاں چند کارآمد نتیجوں کی فہرست نکالتے ہیں۔
فرض کرو کہ U ایک ہمہ گیر مجموعہ ہے اور U کے تحتی مجموعے A اور B ہیں تو مندرجہ ذیل لاگو ہوتا ہے۔

(i) $A \setminus B = A \cap B'$
(ii) $B \setminus A = B \cap A'$
(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$
(iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$
(vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1.4 مجموعوں کے عمل کی خصوصیات Properties of Set operations

مجموعوں کے عمل کی چند خصوصیات ہم بیان کرتے ہیں۔ کوئی تین مجموعے A ، B اور C کیلئے لاگو ہوتا ہے۔

(i) متبادلتی خاصیت (Commutative property)

(a) $A \cup B = B \cup A$ (سٹوں کا اتحاد متبادلہ ہے)

(b) $A \cap B = B \cap A$ (سٹوں کا تقاطع متبادلہ ہے)

(ii) مربوطی خصوصیات (Assosiative property)

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (سٹوں کا اتحاد مربوطی ہے)

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (سٹوں کا تقاطع مربوطی ہے)

(iii) تقسیمی خاصیت (Distributive property)

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (تقاطع، اتحاد پر تقسیمی ہے)

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (اتحاد، تقاطع پر تقسیمی ہے)

اوپر کی خصوصیات کو مثالوں سے تصدیق کرنے کے بجائے یہ بہتر ہے کہ انکے ریاضی ثبوت دیئے جائیں۔ یہ اس کتاب کی دسترس سے باہر ہے۔ کسی طرح ریاضی کے سخت گیر ثبوت کے ساتھ سمجھانے کے لئے اسکا ثبوت دیتے ہیں۔

(i) اتحاد میں متبادلت کی خاصیت : (Commutative property of Union)

اس حصے میں ہم کوئی دو سٹ A اور B کیلئے A ∪ B اور B ∪ A مساوی ہیں ثابت کرنا چاہتے ہیں۔ ہمارے سٹ کے مساویت کے ضابطے سے ظاہر ہوتا ہے کہ "دو سٹ مساوی ہیں اگر وہ صرف مساوی عناصر رکھتے ہیں۔"

پہلے ہم دِکھائیں گے کہ A ∪ B کا ہر عنصر B ∪ A کا عنصر بھی ہے۔ لہٰذا فرض کرو کہ $Z \in (A \cup B)$ ایک آزاد عنصر ہے تو A اور B کے اتحاد کے ضابطے سے ہمیں $Z \in A$ یا $Z \in B$ حاصل ہوتا ہے یعنی ہر ایک

$$z \in A \cup B \implies z \in A \text{ or } z \in B$$ کیلئے

$$\implies z \in B \text{ or } z \in A$$

$$\implies z \in B \cup A$$ کے ضابطے کے مطابق $B \cup A$. (1)

چونکہ (1) ہر ایک $Z \in (A \cup B)$ کیلئے درست ہے اوپر کے خُلاصے سے ظاہر ہے کہ A ∪ B کا ہر عنصر B ∪ A کا بھی عنصر ہے۔ لہٰذا تختی سٹ کے ضابطے سے ہمیں $A \cup B \subseteq B \cup A$ حاصل ہوتا ہے۔

پھر ہم ایک اور خود مختار (آزاد) عنصر $y \in (B \cup A)$ پر غور کریں اور دِکھاتے ہیں کہ یہ y بھی A ∪ B کا ایک عنصر ہے۔

$$y \in B \cup A \implies y \in B \text{ or } y \in A$$ ہر ایک کے لئے

$$\implies y \in A \text{ or } y \in B$$

$$\implies y \in A \cup B$$ کے ضابطے کے مطابق $A \cup B$. (2)

چونکہ (2) ہر ایک $y \in B \cup A$ کیلئے درست ہے۔ اوپر کی وضاحت سے ظاہر ہے کہ B ∪ A کا ہر ایک عنصر AUB کا بھی عنصر ہے۔ لہٰذا تختی مجموعوں کے ضابطے سے ہمیں $(BUA) \subseteq (AUB)$ حاصل ہوتا ہے۔

اسلئے ہم نے بتایا کہ $(BUA) \subseteq (AUB)$ اور $(BUA) \subseteq (AUB)$ یہ اُسی وقت ہوسکتا ہے جبکہ $(A \cup B) = (B \cup A)$ ۔ ٹھیک اسی طریقے سے اوپر کی فہرست میں دی گئی خصوصیات کو ثابت کرنے کے لئے اوپر دئے گئے مرحلوں پر عمل کرنا چاہئے۔ چنانچہ ہم انہیں یہاں ثابت نہیں کریں گے۔

ریاضی میں ثبوت سے متعلق

ریاضی میں ایک بیان کو **درست بیان** کہا جاتا ہے جب کہ وہ ہمیشہ درست ہو۔ اگر ایک بیان کم از کم کسی ایک مثال میں درست نہ ہو تو اس بیان کو **غلط بیان** کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر، چند بیانات پر غور کریں۔

(i) کوئی بھی مثبت طاق سالم عدد ایک عدد اولی (prime number) ہے۔ (ii) ایک مثلث کے تمام زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے

(iii) ہر ایک مفرد عدد ایک طاق سالم عدد ہے۔ (iv) A اور B کوئی دو (مجموعہ) سٹوں کیلئے A\B = B\A

اب بیان (i) غلط ہے۔ باوجود یہ کہ کئی زیادہ طاق مثبت سالم اعداد مفرد ہیں، کیونکہ سالم اعداد جیسے 9، 15، 21، 45 وغیرہ مثبت اور طاق ہیں مگر مفرد نہیں۔

بیان (ii) درست بیان ہے کیونکہ مثلث کسی بھی طرح کا ہو، اس کے زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے۔

بیان (iii) غلط ہے۔ اسلئے کہ 2 ایک مفرد عدد ہے مگر یہ ایک جفت سالم عدد ہے۔ درحقیقت بیان (iii) سوائے 2 کے ہر ایک مفرد کیلئے درست ہے۔ اسلئے اگر ہم ایک بیان کو ثابت کرنا چاہتے ہیں تو ہمیں یہ ثابت کرنا چاہئے کہ یہ تمام مثالوں کیلئے یا موقعوں کیلئے درست ہے۔ اگر ہم کسی بیان کو غیر ثابت کرنا چاہتے ہیں تو یہ کافی ہے کہ ایک مثال دیں جہاں یہ غلط ہے۔

بیان (iv) غلط ہے۔ چلئے ہم اس بیان کی جانچ کریں۔ بنیادی طور پر جب ہم A\B بناتے ہیں تو ہم A سے B کے تمام عناصر کو خارج کردیتے ہیں۔ اسی طرح B\A کیلئے بھی۔ چنانچہ اسکا بہت زیادہ امکان ہے کہ اوپر کا بیان غلط ہے۔ دراصل ہم ایک صورت لیتے ہیں جہاں A = {2, 5, 8} اور B = {5, 7, –1}۔ اس صورت میں، A\B = {2, 8} اور B\A = {7, –1} ہمیں A\B ≠ B\A حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ (iv) میں دیا گیا بیان غلط ہے۔

مثال 1.1

نیچے دئے گئے مجموعوں کیلئے تصدیق کیجئے کہ (i) سٹوں کا اتحاد متبادلت پذیر ہے۔ وِن نقشے سے بھی تصدیق کیجئے۔
(ii) سٹوں کا تقاطع متبادلت پذیر ہے۔ وِن نقشے سے بھی تصدیق کیجئے۔

$A = \{-10,0,1,9,2,4,5\}$ اور $B = \{-1,-2,5,6,2,3,4\}$

حل :

(i) اب $A \cup B = \{-10,0,1,9,2,4,5\} \cup \{-1,-2,5,6,2,3,4\}$

$= \{-10,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,9\}$ (1)

نیز $B \cup A = \{-1,-2,5,6,2,3,4\} \cup \{-10,0,1,9,2,4,5\}$

$= \{-10,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,9\}$ (2)

اس طرح (1) اور (2) سے ہم نے ثابت کیا ہے $(A \cup B) = (B \cup A)$

وِن نقشوں سے

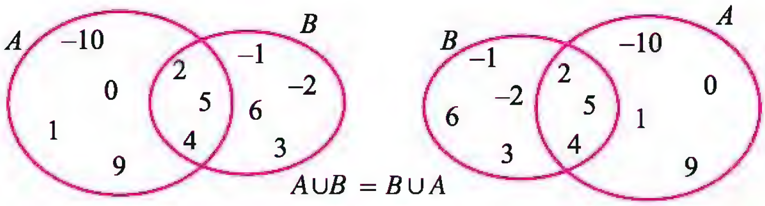


Fig. 1.7

چنانچہ ثابت ہوا کہ مجموعوں کا اتحاد متبادلت پذیر ہے۔

(ii) آیئے ہم اس بات کی تصدیق کریں کہ تقاطع متبادلہ ہے۔

اب $A \cap B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cap \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

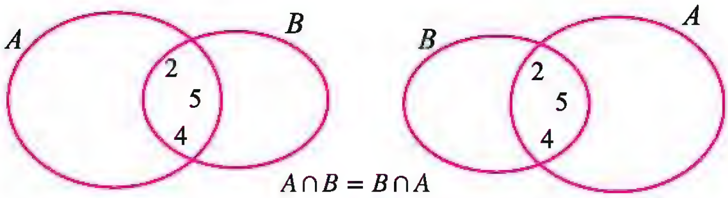
$= \{2, 4, 5\}$. (1)

نیز $B \cap A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cap \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{2, 4, 5\}$. (2)

(1) اور (2) سے ہمیں دیئے گئے دو مجموعوں A اور B کیلئے $(A \cap B) = (B \cap A)$ حاصل ہوتا ہے۔

وِن نقشوں کے ذریعے



$A \cap B = B \cap A$

Fig. 1.8

چنانچہ اسکی تصدیق ہوگئی۔

مثال 1.2

دیا گیا ہے کہ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $C = \{5, 6, 7, 8\}$

ثابت کرو کہ (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. (ii) مزید وِن نقشوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے۔

حل :

(i) اب $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore\ A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (1)

اب $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore\ (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (2)

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(ii) وِن نقشوں کے استعمال سے

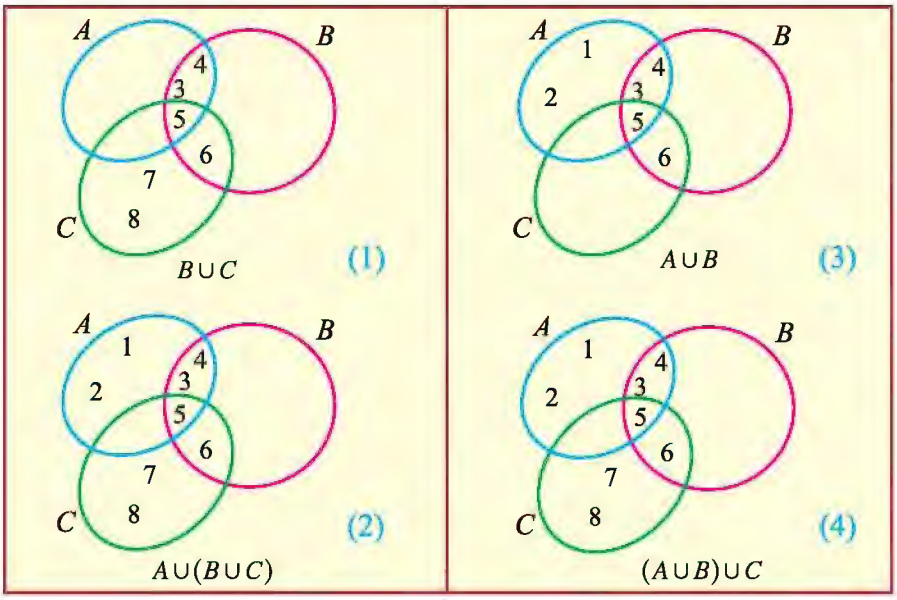


Fig. 1.9

چنانچہ (2) اور (4) سے ہم نے تصدیق کیا کہ مجموعوں کا اتحاد مربوطی ہے۔

مثال 1.3

فرض کریں $A = \{a, b, c, d\}$ ، $B = \{a, c, e\}$ اور $C = \{a, e\}$ تصدیق کیجئے کہ (i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(ii) وِن کے خاکوں سے بھی تصدیق کیجئے۔

حل : ہمیں دیا گیا ہے $A = \{a, b, c, d\}$ ، $B = \{a, c, e\}$ اور $C = \{a, e\}$

اور ہمیں یہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ اسلئے ہم پہلے $A \cap (B \cap C)$ پر غور کریں۔

پہلے ہم دریافت کریں گے $B \cap C = \{a, c, e\} \cap \{a, e\} = \{a, e\}$

چنانچہ $A \cap (B \cap C) = \{a, b, c, d\} \cap \{a, e\} = \{a\}$. (1)

$A \cap B = \{a, b, c, d\} \cap \{a, c, e\} = \{a, c\}$

اب ہم دریافت کریں گے $(A \cap B) \cap C = \{a, c\} \cap \{a, e\} = \{a\}$ چنانچہ (2)

اب (1) اور (2) سے مطلوبہ نتیجہ فراہم کرتے ہیں

وِن کے خاکوں سے استعمال سے

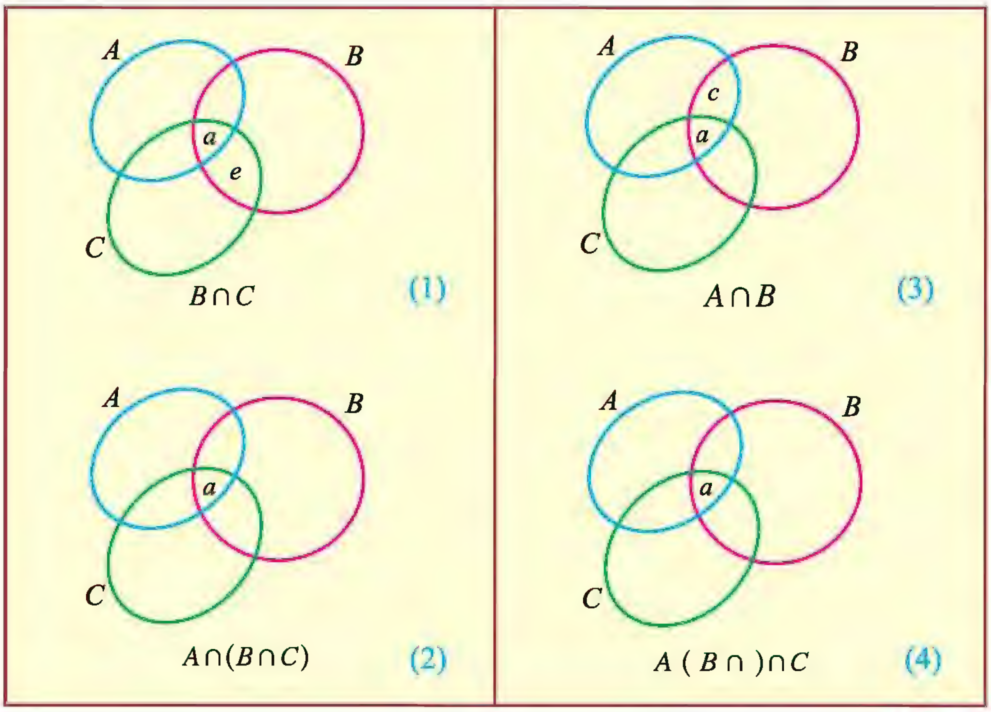


Fig. 1.10

(2) اور (4) سے تصدیق ہوا کہ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ہے۔

مثال 1.4

دیا گیا ہے $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، $B = \{a, e, i, o, u\}$ اور $C = \{c, d, e, u\}$

دکھاؤ کہ $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ مزید وِن کے خاکوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے۔

حل : (i) آیئے پہلے ہم $A \setminus (B \setminus C) = (A\setminus B) \setminus C$ دریافت کریں

$$(B \setminus C) = \{a,e,i,o,u\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{a,i,o\}$$

$$A \setminus (B \setminus C) = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,i,o\} = \{b,c,d,e\}. \qquad (1)$$

پھر ہم $(A \setminus B) \setminus C$ دریافت کرتے ہیں۔

$$A \setminus B = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,e,i,o,u\} = \{b,c,d\}$$

چنانچہ $(A \setminus B) \setminus C = \{b,c,d\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{b\}. \qquad (2)$

(1) اور (2) سے ہم دیکھتے ہیں کہ $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

چنانچہ سٹوں کا فرق مربوطی نہیں ہے۔

(ii) وِن کے خاکوں کی مدد سے

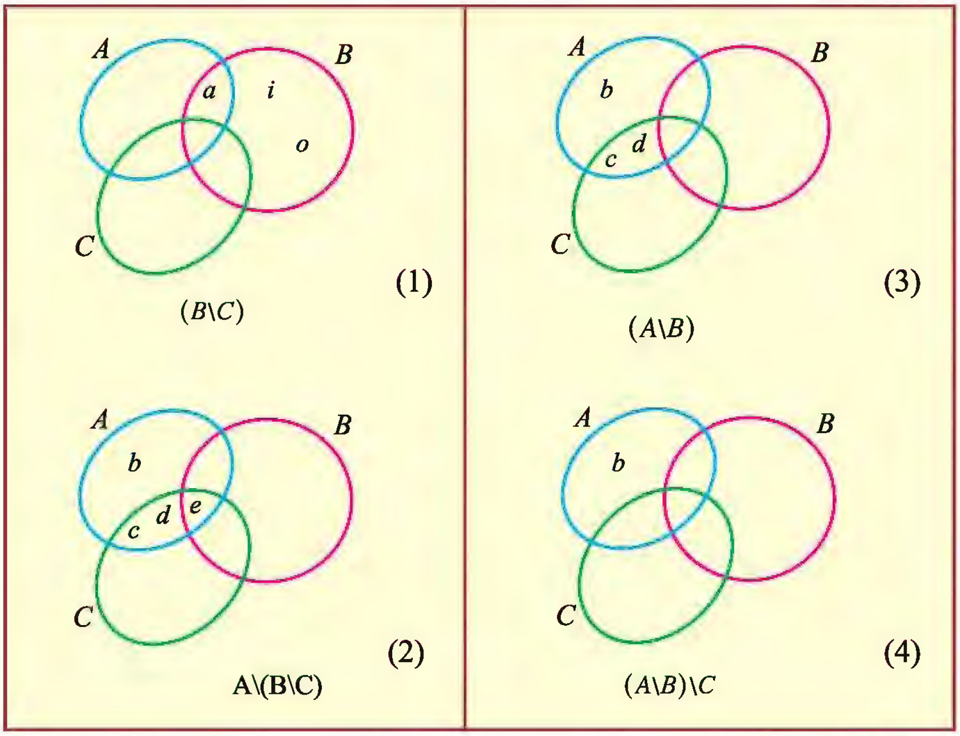


Fig. 1.11

(2) اور (4) سے تصدیق ہوتا ہے کہ $A \setminus (B\setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C.$

برائے ذہن نشینی

تاہم اگر مجموعہ A، B اور C باہم غیر منسلک ہیں تو $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ ہے۔اِسکو ثابت کرنا بہت آسان ہے۔ آیئے ہم اسکو ثابت کرتے ہیں۔چونکہ B اور C غیر منسلک یا جُدا ہیں ہمیں $B \setminus C = B$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ A، B غیر منسلک ہیں ہمیں $(A \setminus B) = A$ حاصل ہوتا ہے۔اسطرح ہمیں $A \setminus (B \setminus C) = A$ حاصل ہوتا ہے۔

مزید $A \setminus B = A$ اور A، C جُدا ہیں اسلئے ہمیں $A \setminus C = A$ حاصل ہوتا ہے۔چنانچہ $(A \setminus B) \setminus C = A$ اسلئے ہمیں $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ مطلوبہ سٹ حاصِل ہوتا ہے۔اسطرح سٹوں کے لئے جو باہم غیر منسلک ہیں سٹوں کا فرق مربوطی ہے

مثال 1.5 فرض کرو کہ $C = \{2,4,6,7\}$ $\quad A = \{0,1,2,3,4\},\ B = \{1,-2,3,4,5,6\}$

(i) بتاؤ کہ $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (ii) وِن نقشوں سے تصدیق کیجئے۔

حل : پہلے ہم $A\cup(B\cap C)$ دریافت کرتے ہیں۔

$$B\cap C = \{1,-2,3,4,5,6\}\cap\{2,4,6,7\} = \{4,6\};$$

فرض کرو کہ $A\cup(B\cap C) = \{0,1,2,3,4\}\cup\{4,6\} = \{0,1,2,3,4,6\}.$ (1)

$$A\cup B = \{0,1,2,3,4\}\cup\{1,-2,3,4,5,6\}$$
$$= \{-2,0,1,2,3,4,5,6\},$$

پھر فرض کرو $A\cup C = \{0,1,2,3,4\}\cup\{2,4,6,7\} = \{0,1,2,3,4,6,7\}$

$$(A\cup B)\cap(A\cup C) = \{-2,0,1,2,3,4,5,6\}\cap\{0,1,2,3,4,6,7\}$$
$$= \{0,1,2,3,4,6\}. \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

(ii) وِن نقشوں کے استعمال سے

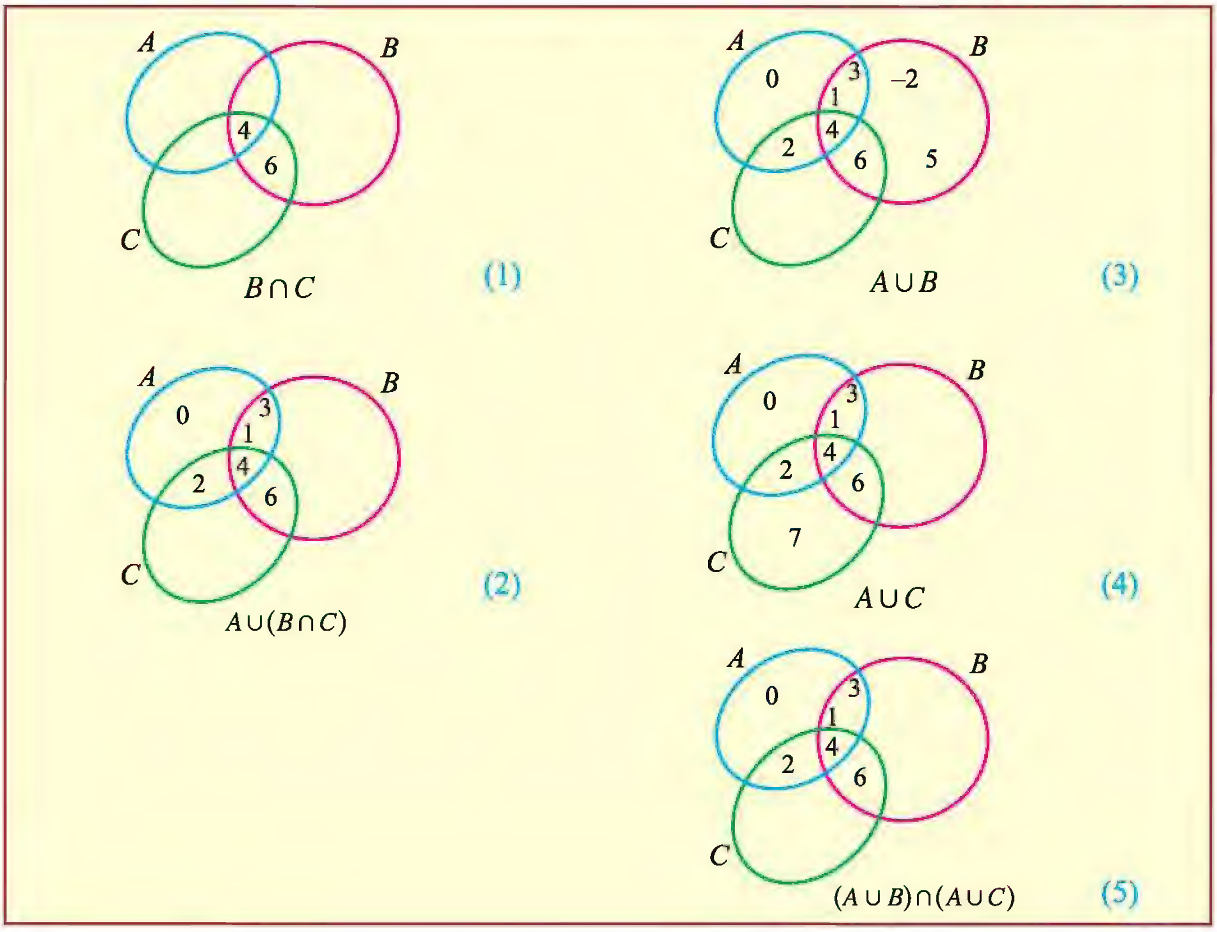


Fig. 1.12

(2) اور (5) سے تصدیق ہوتا ہے کہ $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

مثال 1.6 $A=\{x|-3\le x<4, x\in\mathbb{R}\}$, $B=\{x\,|\,x<5, x\in\mathbb{N}\}$,

اور $C=\{-5,-3,-1,0,1,3\}$ معلوم کرو کہ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

حل :

پہلے غور کرو کہ سٹ A میں تمام حقیقی اعداد (صرف سالم اعداد نہیں) جو 3− سے بڑے یا مساوی ہیں اور 4 سے چھوٹے ہیں۔

دوسری جانب سٹ B میں تمام سالم اعداد ہیں۔ جو 5 سے چھوٹے ہیں۔ اسلئے

$A=\{x|-3\le x<4, x\in R\}$ یعنی A میں 3− سے 4 تک تمام حقیقی اعداد ہیں مگر 4 اسمیں شامل نہیں ہے۔ اور

$B=\{x|\ x<5, x\in N\}=\{1,2,3,4\}$ اب ہم دریافت کرتے ہیں

$$B\cup C=\{1,2,3,4\}\cup\{-5,-3,-1,0,1,3\}$$

$$=\{1,2,3,4,-5,-3,-1,0\}$$ اسطرح

$$A\cap(B\cup C)=A\cap\{1,2,3,4,-5,-3,-1,0\}$$

$$=\{-3,-1,0,1,2,3\}. \qquad (1)$$

پھر ہم $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ دریافت کرتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں

$$A\cap B=\{x|-3\le x<4, x\in R\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3\};$$

اور $$A\cap C=\{x|-3\le x<4, x\in R\}\cap\{-5,-3,-1,0,1,3\}$$

$$=\{-3,-1,0,1,2,3\}$$

چنانچہ $$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,2,3\}\cup\{-3,-1,0,1,3\}$$

$$=\{-3,-1,0,1,2,3\}. \qquad (2)$$

اب (1) اور (2) سے معلوم ہوا کہ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

مشق 1.1

1. اگر $A\subset B$ ہو تو دکھاؤ کہ $(A\cup B)=B$ (ون نقشہ کا استعمال کیجئے)
2. اگر $A\subset B$ ہو تو $A\cap B$ اور $A\setminus B$ معلوم کیجئے۔ (ون نقشہ استعمال کیجئے)
3. فرض کرو کہ $P=\{a,b,c\}$ ، $Q=\{g,h,x,y\}$ اور $R=\{a,e,f,s\}$
مندرجۂ ذیل معلوم کیجئے۔
(i) $P\setminus R$ (ii) $Q\cap R$ (iii) $R\setminus(P\cap Q)$.
4. اگر $C=\{1,2,3,4,5,6\}$ $B=\{2,4,6\}$, $A=\{4,6,7,8,9\}$, ہو تو دریافت کیجئے
(i) $A\cup(B\cap C)$ (ii) $A\cap(B\cup C)$ (iii) $A\setminus(C\setminus B)$
5. دیا گیا ہے $A=\{a,x,y,r,s\}$ ، $B=\{1,3,5,7,-10\}$ سٹ کے اتحاد کی متبادلہ خاصیت کی تصدیق کیجئے۔

6. مجموعوں کے تقاطع کیلئے متبادلہ خاصیت کی تصدیق کیجئے۔

$A = \{l, m, n, o, 2,3,4,7\}$ اور $B = \{2, 5, 3, -2, m, n, o, p\}$.

7. اگر $A = \{x \mid x$ 42 کا جزوضربی ہے $\}$، $B = \{x \mid 5 < x \le 12, x \in \mathbb{N}\}$،
اور $C = \{1,4,5,6\}$ ہے تصدیق کیجئے $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

8. دیا گیا ہے $P = \{a,b,c,d,e\}$، $Q = \{a,e,i,o,u\}$ اور $R = \{a,c,e,g\}$
سٹوں کے تقاطع کیلئے مربوطی خاصیت کی جانچ کیجئے۔

9. $B = \{6,10,12,18,24\}$; $A = \{5,10,15,20\}$ اور $C = \{7,10,12,14,21,28\}$
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ کی تصدیق کیجئے۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے

10. فرض کرو $A = \{-5,-3,-2,-1\}$، $B = \{-2,-1,0\}$ اور $C = \{-6,-4,-2\}$
$(A \setminus B) \setminus C$ اور $A \setminus (B \setminus C)$ دریافت کیجئے۔ مجموعوں کے فرق کے عمل کے بارے میں ہم کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں ؟

11. اگر $C = \{-1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $B = \{-1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8, 10\}$,
بتاؤ کہ (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(iii) وِن نقشوں کی مدد سے (i) کی تصدیق کیجئے۔ (iv) وِن نقشوں کی مدد سے (ii) کی تصدیق کیجئے۔

1.5۔ ڈی مارگن کے کلیے (De Morgan's Laws)

ڈی مارگن کے والد (ایک برطانوی شہری)، ایسٹ انڈیا کمپنی، ہندوستان میں ملازمت کرتے تھے۔ آگسٹس ڈی مارگن (1806-1871) میں تمل ناڈو میں واقع مدورائی میں پیدا ہوئے۔ جب وہ سات ماہ کے تھے، تو ان کا خاندان برطانیہ کو منتقل ہو گیا۔ انہوں نے انگلستان کے ٹرینٹی کالج، کیمبرڈج میں تعلیم پائی۔ ڈی مارگن کے کلیے سٹ کے تین بنیادی اعمال اتحاد، تقاطع اور اتمام کے تعلق کو ظاہر کرتے ہیں۔

سیٹ کے فرق (Set difference) کے لئے ڈی مارگن کے کلیے

تین مجموعوں A، B، C کیلئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

سیٹ کے اتمام (Set complementation) کے لئے ڈی مارگن کے کلیے

فرض کرو کہ U ہمہ گیر سٹ ہے جو A، B سٹوں کو رکھتا ہے تو

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

اِتمامی کلیوں کے ثبوت پر غور کریں جو سٹ فرق کے ثبوت پر عمل پیرا ہے کیونکہ کوئی سٹ D کیلئے $D' = U \setminus D$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم انہیں دوبارہ ثابت کرنے کی کوشش نہیں کریں گے، مگر ہم سیکھیں گے کہ ان کلیوں کو کس طرح حسابوں کے حل کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 1.7

وِن کے خاکوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے $(A \cap B)' = A' \cup B'$

حل :

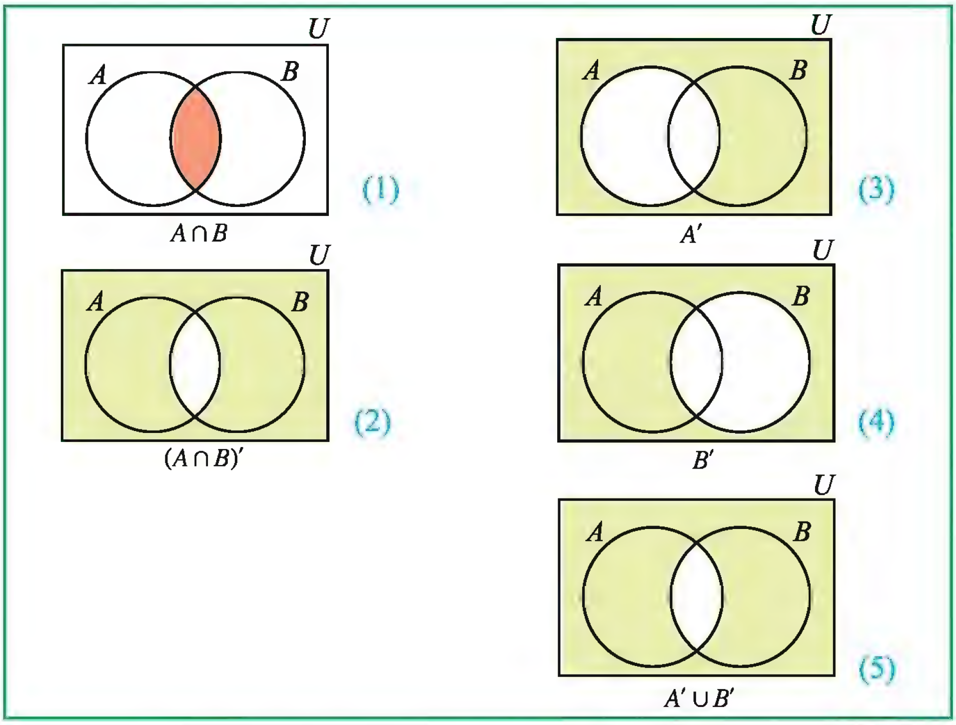


Fig. 1.13

(2) اور (5) سے تصدیق ہوتا ہے کہ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مثال 1.8

ون کے خاکوں کے استعمال سے سٹ کے فرق کیلئے ڈی مارگن کُلیے کی تصدیق کیجئے۔

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

حل :

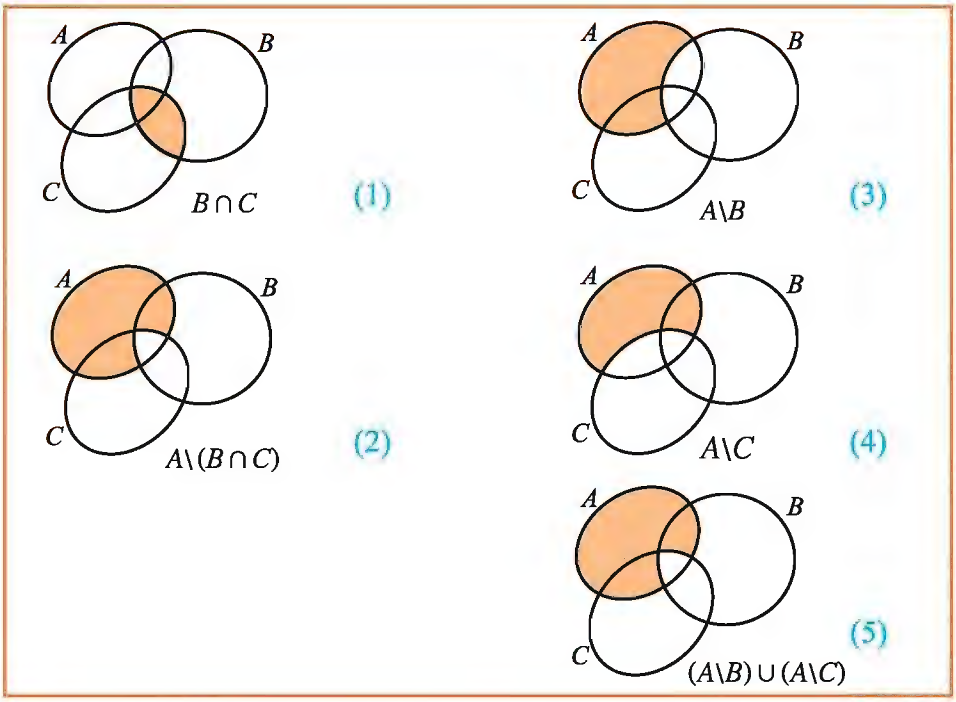


Fig. 1.14

(2) اور (5) سے ثابت ہوتا ہے کہ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

مثال 1.9

فرض کرو کہ $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots 10\}$ $A = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$. اتمام کیلئے ڈی مارگن کلیوں کی تصدیق کیجئے۔

حل : پہلے ہم تصدیق کریں گے۔ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

اس کے لئے پہلے ہم فرض کریں گے کہ

$$A \cup B = \{-2, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\};$$

$$(A \cup B)' = U \setminus \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \{-1, 0, 6, 7, 10\} \quad (1)$$

جس سے معلوم ہوتا ہے

$$A' = U \setminus A = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B' = U \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\} \ .$$

اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$A' \cap B' = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$$

چنانچہ ہمیں حاصل ہوتا ہے $= \{-1, 0, 6, 7, 10\}$ (2)

(1) اور (2) سے ثابت ہوتا ہے $(A \cup B)' = A' \cap B'$

اسی طرح اوپر دیئے گئے ستوں کیلئے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ہم اس کی مزید معلومات کو مشق میں کرائیں گے۔

مثال 1.10

فرض کرو کہ $A = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, c, d, e\}$ and $C = \{d, e, f, g, 2, y\}$.

تصدیق کیجئے $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

حل : پہلے ہم دریافت کرتے ہیں

$$B \cup C = \{1, 2, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, 2, y\}$$

$$= \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}.$$

پھر $A \setminus (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\} \setminus \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$

$$= \{a, b, x, z\}. \quad (1)$$

پھر اس کے بعد ہم معلوم کریں گے $A \setminus B = \{a, b, f, g, x, y, z\}$ اور $A \setminus C = \{a, b, c, x, z\}$

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a, b, x, z\}. \quad (2)$$

چنانچہ (1) اور (2) سے ظاہر ہوتا ہے $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

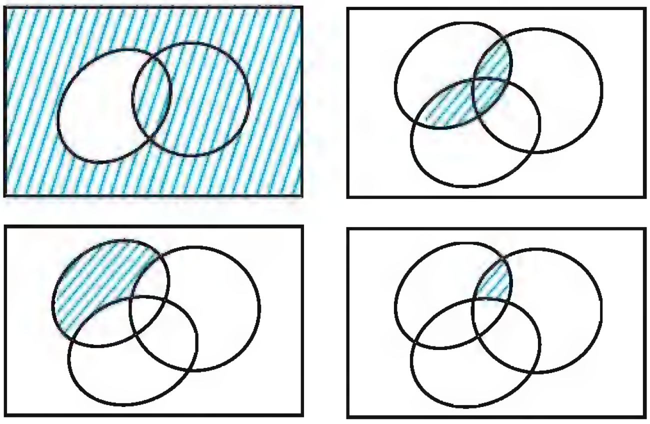
مشق 1.2

1. مندرجۂ ذیل کو ون نقشوں سے ظاہر کیجئے۔

(i) $U = \{5, 6, 7, 8, \ldots\ldots 13\}$, $A = \{5, 8, 10, 11\}$, اور $B = \{5, 6, 7, 9, 10\}$

(ii) $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ $M = \{b, d, f, g\}$ اور $N = \{a, b, d, e, g\}$

2. ہر ایک کا سیاہ کردہ حصہ کی تشریح کیجئے۔ جہاں کہیں ضروری ہو نشانات A، B، C، $\cup$، $\cap$ اور \ استعمال کریں۔



3 ذیل کے بیانات سمجھانے کیلئے تین مجموعے A، B، C کیلئے وِن کے خاکے کھینچئے۔

(i) $A\cap B\cap C$ (ii) A اور B جُدا ہیں مگر دونوں C کے تحتی سٹ ہیں

(iii) $A\cap(B\setminus C)$ (iv) $(B\cup C)\setminus A$ (v) $A\cup(B\cap C)$

(vi) $C\cap(B\setminus A)$ (vii) $C\cap(B\cup A)$

4. وِن نقشوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$.

5. فرض کرو کہ $B=\{4,16,20,28\}$ اور $A=\{8,16,24\}$, $U=\{4,8,12,16,20,24,28\}$,
دریافت کیجئے۔ $(A\cap B)'$ اور $(A\cup B)'$

6. دیا گیا ہے۔ $B=\{a,b,c\}$ اور $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $A=\{a,b,f,g\}$,
اتمامی عمل کیلئے ڈی مارگن کلیوں کی تصدیق کیجئے۔

7. ذیل میں دیئے گئے سٹوں کے استعمال سے سٹ فرق کیلئے ڈی مارگن اصول کی تصدیق کیجئے۔
$A=\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$, $B=\{1,2,5,7\}$ اور $C=\{3,9,10,12,13\}$.

8. اگر $A=\{10,15,20,25,30,35,40,45,50\}$, $B=\{1,5,10,15,20,30\}$
اور $C=\{7,8,15,20,35,45,48\}$ تصدیق کیجئے۔ $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

9. وِن نقشوں سے ذیل کی تصدیق کیجئے کہ کیا وہ صحیح ہیں

(i) $A\cap(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (ii) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(iii) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (iv) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

(v) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ (vi) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

1.6 سٹوں کی بنیادیت (Cardinality of sets)

IX ویں کلاس میں ضابطہ $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ کے استعمال سے دوسٹوں سے متعلق مسئلوں کو حل کرچکے ہیں۔اس ضابطے کی مدد سے ہم مجموعہ $A \cup B$ کی بنیادیت معلوم کرسکتے ہیں جبکہ A، B اور $A \cap B$ کی بنیادیت ہمیں معلوم ہے۔فرض کروکہ A، B اور C تین سٹ ہیں ہم $A \cup B \cup C$ کی بنیادیت دریافت کرنا چاہتے ہیں تو نظیری ضابطہ کیا ہوگا ؟ اس صورت میں ذیل کا ضابطہ استعمال ہوتا ہے۔

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(B\cap C) - n(A\cap C) + n(A\cap B\cap C).$$

ذیل کی مثال اس ضابطے کا استعمال سمجھاتی ہے۔

مثال 1.11

طلباء کی ایک جماعت میں 65 فٹ بال کھیلتے ہیں،45 ہاکی کھیلتے ہیں، 42 کرکٹ کھیلتے ہیں۔20 فٹ بال اور ہاکی کھیلتے ہیں، 25 فٹ بال اور کرکٹ کھیلتے ہیں۔15 ہاکی اور کرکٹ کھیلتے ہیں اور 8 تینوں کھیل کھیلتے ہیں۔جماعت میں طلباء کی تعداد دریافت کیجئے۔

حل :

فرض کروکہ F، H اور C ان طلباء کے سٹوں کی نمائندگی کرتے ہیں جو بالترتیب فٹ بال، ہاکی اور کرکٹ کھیلتے ہیں۔تو

$$n(F) = 65, n(H) = 45, \text{ and } n(C) = 42 \cdot$$

نیز $n(F\cap H) = 20$, $n(F\cap C) = 25$, $n(H\cap C) = 15$ اور $n(F\cap H\cap C) = 8$

$n(F\cup H\cup C)$ ہم پوری جماعت میں طلباء کی تعداد دریافت کرنا چاہتے ہیں۔یعنی $n(F\cup H\cup C)$ ضابطے سے ہم کو حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} n(F\cup H\cup C) &= n(F) + n(H) + n(C) - n(F\cap H) \\ &\quad - n(H\cap C) - n(F\cap C) + n(F\cap H\cap C) \\ &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100. \end{aligned}$$

چنانچہ جماعت میں طلباء کی تعداد = 100 ہے۔

دوسرا طریقہ :

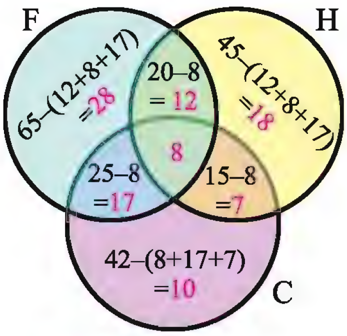


Fig 1.15

اسی حساب کو ون نقشوں کے استعمال سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔روزمرّہ زندگی میں پیش آنیوالے حسابوں میں بھی آجکل ون نقشوں اور منطق کے استعمال سے حل کرنا اب ممکن ہے۔ون نقشوں میں تین تقاطع سٹ ہوں گے۔جو ہر ، ایک کھیل کی نمائندگی کرتے ہیں۔خاکے کو دیکھئے اور جماعت میں کھلاڑیوں کی تعداد دریافت کرنے کی کوشش کریں۔دیئے گئے بیانات پراحتیاط سے کام کرتے ہوئے درج کرتے چلے جائیں۔

جماعت میں طلباء کی تعداد $= 28 + 12 + 18 + 7 + 10 + 17 + 8 = 100.$

مثال 1.12

یونیورسٹی طلباء نے ایک جائزہ لیا، جس میں ذیل کی معلومات حاصل ہوئیں۔ 64 نے ریاضی کا کورس لیا، 94 نے کمپیوٹر سائنس کا کورس لیا۔ 58 نے طبیعیات کا کورس لیا، 28 نے ریاضی اور طبیعیات لیا۔ 26 نے ریاضی اور کمپیوٹر سائنس، 22 نے کمپیوٹر سائنس اور طبیعیات کا کورس لیا۔ اور 14 نے تینوں کورس میں حِصّہ لیا۔ جائزہ لئے گئے طلباء کی کل تعداد معلوم کیجئے۔ دریافت کرو کہ کتنے طلباء نے صرف ایک کورس کا انتخاب کیا ؟

حل : آیئے ہم دیے گئے معلومات کو ون نقشہ سے نُمائندگی کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ M, C, P ان طلباء کے مجموعوں کی نُمائندگی کرتے ہیں جنھوں نے بالترتیب ریاضی، کمپیوٹر سائنس اور طبیعیات لی۔ دی گئی معلومات ون کے خاکہ میں درج کی گئی ہے۔

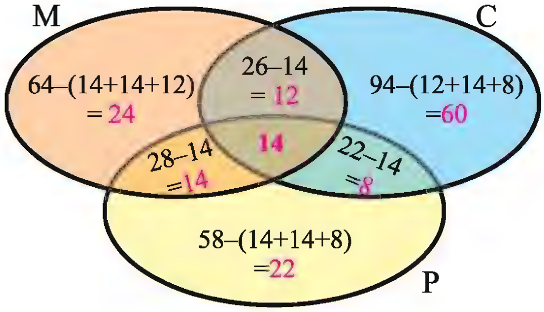


Fig 1.16

$n(M\cap C\cap P') = 26 - 14 = 12$

$n(M\cap P\cap C') = 28 - 14 = 14$

$n(C\cap P\cap M') = 22 - 14 = 8$

جائزہ لیے گئے طلباء کی تعداد

$= 24 + 12 + 60 + 8 + 22 + 14 + 14 = 154$

صرف ریاضی لینے والے طلباء کی تعداد $= 64-(14+14+12) = 24$

صرف کمپیوٹر سائنس لینے والے طلباء کی تعداد $= 94 - (12+14+8) = 60$

صرف طبیعیات لینے والے طلباء کی تعداد $= 58 - (14+14+8) = 22$

صرف ایک کورس لینے والے طلباء کی تعداد $= 24 + 60 + 22 = 106$

مثال 1.13

ایک ریڈیو اسٹیشن نے موسیقی کی قسم جو طلباء پسند کرتے ہیں، اس کے بارے میں 190 طلباء کا جائزہ لیا۔ اس سے پتہ چلا کہ 114 طلباء راک موسیقی، 50 طلباء فوک موسیقی اور 41 طلباء کلاسیکی موسیقی، 14 طلباء راک اور فوک موسیقی، 15 طلباء راک اور کلاسیکی موسیقی، 11 طلباء کلاسیکی اور فوک موسیقی، 5 طلباء تینوں موسیقی کی قسموں کو پسند کرتے ہیں۔

معلوم کرو کہ : (i) کتنے لڑکوں نے موسیقی کی کسی بھی قسم کو پسند نہیں کیا ؟

(ii) کتنے لڑکے صرف دو قسموں کو پسند کرتے ہیں؟

(iii) کتنے لڑکے فوک موسیقی پسند کرتے ہیں مگر راک موسیقی پسند نہیں کرتے ؟

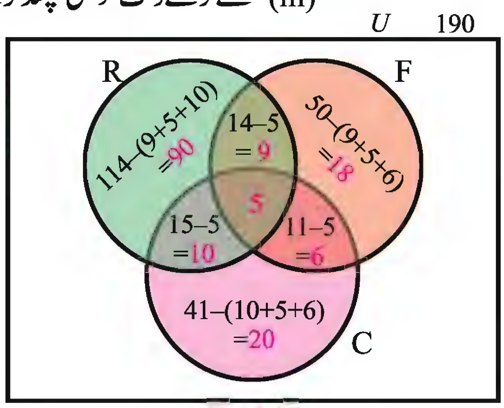


Fig. 1.17

حل :

فرض کیجئے کہ F, R اور C موسیقی کی تین قسموں کی بالترتیب نُمائندگی کرتے ہیں۔ وِن نقشے میں دی گئی اطلاعات کو بھرتے ہیں۔ اس سے ہمیں حاصل ہوا۔

$n(R\cap F\cap C') = 14 - 5 = 9$

$n(R\cap C\cap F') = 15 - 5 = 10$

$n(F\cap C\cap R') = 11 - 5 = 6.$

وِن نقشے سے معلوم ہوا کہ طلباء کی تعداد جو تین قسموں میں سے کسی نہ کسی ایک قسم کو پسند کرنے والے طلباء کی تعداد

$90 + 9 + 30 + 6 + 20 + 10 + 5 = 170.$

جائزہ لئے گئے طلباء کی تعداد $= 190$

تینوں قسموں کو پسند نہ کرنے والے طلباء کی تعداد $= 190 - 170 = 20$

صرف دو قسموں کو پسند کرنے والے طلباء کی تعداد $= 9 + 6 + 10 = 25$

صرف فوک موسیقی پسند کرتے ہیں مگر راک موسیقی نہیں $= 30 + 6 = 36$

مشق 1.3

1. اگر A اور B دو مجموعے ہیں اور U ہمہ گیر سٹ ہے اسطرح کہ $n(A) = 200, n(B) = 300$, $n(U) = 700$ اور $n(A \cap B) = 100$ دریافت کیجئے۔ $n(A' \cap B')$

2. دیا گیا ہے $n(A) = 285, n(B) = 195, n(U) = 500, n(A \cup B) = 410,$ دریافت کیجئے $n(A' \cup B')$

3. کوئی تین سٹ A ، B اور C کیلئے اگر $n(A) = 17$ $n(B) = 17,$ $n(C) = 17$, $n(A \cap B) = 7$ $n(B \cap C) = 6,$ $n(A \cap C) = 5$, $n(A \cap B \cap C) = 2,$ ہو تو دریافت کیجئے $n(A \cup B \cup C)$

4. ذیل میں دیئے گئے سٹوں کیلئے تصدیق کیجئے

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(i) $A = \{4,5,6\},\ B = \{5, 6, 7,8\}$ اور $C = \{6,7,8,9\}$

(ii) $A = \{a,b,c,d,e\}\ B = \{x,y,z\}$ اور $C = \{a, e, x\}$.

5. ایک کالج میں 60 طلباء کیمیاء میں داخلہ لیا، 40 نے طبعیات میں، 30 نے حیاتیات میں، 15 نے کیمیاء اور طبعیات میں، 10 نے طبعیات اور حیاتیات میں، 5 نے بیالوجی اور کیمیاء میں داخلہ لیا۔ کسی نے بھی تینوں میں داخلہ نہیں لیا۔ دریافت کیجئے کہ کتنوں نے کم از کم ایک سبق میں داخلہ لیا۔

6. ایک گاؤں میں 85% لوگ انگریزی بولتے ہیں۔ 40% ٹمل بولتے ہیں اور 20% ہندی بولتے ہیں۔ مزید 42% انگریزی اور ٹمل بولتے ہیں۔ 23% ٹمل اور ہندی بولتے ہیں۔ اور 10% انگریزی اور ہندی بولتے ہیں۔ دریافت کرو کہ کتنے فیصد لوگ تینوں زبانیں بولتے ہیں

7. ایک اشتہاری ایجنسی نے دریافت کیا کہ اسکے 170 صارفوں میں سے 115 ٹیلی ویژن استعمال کرتے ہیں، 110 ریڈیو استعمال کرتے ہیں اور 130 میگزین استعمال کرتے ہیں۔ مزید 85 ٹیلی ویژن اور میگزین استعمال کرتے ہیں۔ 75 ٹیلی ویژن اور ریڈیو استعمال کرتے ہیں۔ 95 ریڈیو اور میگزین استعمال کرتے ہیں۔ 70 تینوں استعمال کرتے ہیں۔ ان معطیات کی نمائندگی کیلئے وِن کے خاکے کھینچئے۔ دریافت کیجئے

   (i) کتنے صرف ریڈیو استعمال کرتے ہیں (ii) کتنے صرف ٹیلی ویژن استعمال کرتے ہیں

   (iii) کتنے ٹیلی ویژن اور میگزین استعمال کرتے ہیں مگر ریڈیو استعمال نہیں کرتے ہیں

8. 4000 طلباء کے ایک مدرسے میں 2000 فرنچ جانتے ہیں، 3000 ٹمل جانتے ہیں، اور 500 ہندی جانتے ہیں۔ 1500 فرانسیسی اور ٹمل جانتے ہیں 300 فرانسیسی اور ہندی جانتے ہیں۔ 200 ٹمل اور ہندی جانتے ہیں اور 50 تینوں زبانیں جانتے ہیں۔

   (i) کتنے طلباء تینوں زبانوں میں سے ایک بھی نہیں جانتے (ii) کتنے طلباء کم از کم صرف ایک زبان جانتے ہیں

   (iii) کتنے طلباء صرف دو زبانیں جانتے ہیں

9. ایک گاؤں کے 120 خاندان میں 93 خاندان پکوان کے لئےلکڑیاں استعمال کرتے ہیں، 63 خاندان کروسین استعمال کرتے ہیں، 45 پکوان گیس استعمال کرتے ہیں۔ 45 خاندان لکڑیاں اور کروسین استعمال کرتے ہیں، 24 خاندان کروسین اور پکوان گیس استعمال کرتے ہیں، 27 خاندان پکوان گیس اور لکڑیاں استعمال کرتے ہیں۔ دریافت کروکہ کتنے لکڑیاں، کروسین اور پکوان گیس استعمال کرتے ہیں۔

1.7 تعلقات (Relations)

پچھلے حصّے میں ہم نے مجموعے کے تصوّر کو دیکھا۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ کس طرح دیئے ہوئے سٹوں سے اتحاد، تقاطع اور اتمام کو لے کر نئے مجموعے بنا سکتے ہیں۔ یہاں ہم دیکھیں گے کہ کس طرح دیئے ہوئے دو سٹ A ، B سے ایک دوسرے طریقے سے نیا مجموعہ بنا سکتے ہیں۔ یہ نیا مجموعہ ریاضی کے ایک اہم تصور "تعلق، تفاعل" کی تعریف کیلئے اہم ہے۔

دو غیر معدوم (non-empty) سٹ A اور B دیئے گئے ہیں۔ ہم ایک نیا سٹ A × B بنا سکتے ہیں اسکو A کراس B پڑھتے ہیں جو A اور B کا کارتیسی حاصل ضرب کہلاتا ہے۔ اسکی تعریف یوں کی جاتی ہے۔

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ اور } b \in B\}$$

اسی طرح سٹ B × A کی تعریف یوں ہے

$$B \times A = \{(b, a) / b \in B \text{ اور } a \in A\}$$

غور کریں

(i) (a, b) کی جوڑی کی ترتیب بہت اہم ہے۔ یعنی $(a, b) \neq (b, a)$ اگر $a \neq b$

(ii) سٹ A اور B مساوی ہیں تو یہ ممکن ہے۔ A × B

آیئے ہم ایک مثال دیکھیں

فرض کرو کہ ایک سیل فون (cell phone) کی دُکان 3 مختلف قسم کے سیل فون فروخت کرتی ہے اور ہم انہیں C1, C2, C3 کہتے ہیں آیئے یہ بھی فرض کریں کہ C1 کی قیمت ₹ 1200 ، C2 کی قیمت ₹ 2500 اور C3 کی قیمت ₹ 2500 ہے

ہم A = { C1, C2, C3 } اور B = { 1200 , 2500 } کہتے ہیں

ایسی صورت میں $A \times B = \{(C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3, 2500)\}$

مگر $B \times A = \{(1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2,), (1200, C_3), (2500, C_3)$.

ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $A \neq B$ ہو تو $A \times B \neq B \times A$

آیئے A × B کے ایک تحتی مجموعہ F پر غور کریں۔ F = { (C1,1200), (C2,2500), (C3,2500) }

اوپر کی ترتیب وار جوڑی میں ہر ایک پہلا عنصر ایک مخصوص عنصر سے تعلق رکھتا ہے۔ یعنی پہلی جگہ کا کوئی بھی عنصر دوسری جگہ کے ایک سے زیادہ عنصر سے نہیں جوڑا گیا۔

F کے ہر ایک عنصر کے لئے بنیادی طور پر دوسرا عنصر پہلے عنصر کے قیمت کی نُمائندگی کرتا ہے۔ اسکے بعد A × B کے تحتی سٹ E پر غور کریں۔ $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$

یہاں پہلا جُز 2500 , C_2 اور C_3 دو مختلف عناصر سے تعلق رکھتا ہے۔

تعریف

فرض کرو کہ A ، B کوئی دو غیر معدوم سٹ ہیں ، ایک **تعلق** R ، A سے B کو $A \times B$ کا ایک غیر معدوم تحتی سٹ ہے۔یعنی $R \subseteq A \times B$

R کا علاقہ (Domain) $= \{ x \in A / (x, y) \in R$ کیلئے $y \in B /$ کوئی $\}$

R کی حد (Range) $= \{ y \in B / (x, y) \in R$ کیلئے $x \in A$ کوئی $\}$

1.8 تفاعلات (Functions)

فرض کرو کہ A اور B دو غیر معدوم سٹ ہیں A سے B کو تعلق ایک **تفاعل** ہے اس طرح کہ $f \subseteq A \times B$ ذیل میں رکھتا ہے۔

(i) f کا علاقہ A ہے

(ii) ہر ایک $x \in A$ کیلئے صرف اور صرف ایک $y \in B$ ہے اس طرح کہ $(x, y) \in f$.

پیٹر ڈرچلٹ ، جرمنی

(1805-1859)

ڈرچلٹ نے عددی نظام، تجزیہ اور میکانیات کے میدان میں بے مثال عنایات پیش کی ہیں۔ 1837 میں اس نے تفاعل میں ترقیم $y=f(x)$ کا نظریہ پیش کیا۔اس نے مشہور Pigeonhole Principle کا اصول پیش کیا۔

غور کریں کہ A سے B کو تفاعل ایک مخصوص قسم کا تعلق ہے جو (i) اور (ii) کی شرط پوری کرتا ہے۔ایک تفاعل کو **میپنگ** (Mapping) بھی کہا جاتا ہے۔

ایک تفاعل A سے B کی نمائندگی $f : A \rightarrow B$ سے کی جاتی ہے اور اگر $(x,y) \in f$ ہو تو ہم $y = f(x)$ لکھتے ہیں۔

ہم تفاعل کی تعریف کو تعلق کے خیال کے بغیر دوبارہ ذیل کی طرح ترتیب دے سکتے ہیں۔ درحقیقت کئی اوقات اس ضابطے کو تفاعل کے ضابطۂ عمل میں استعمال کیا جاتا ہے۔

تعریف

فرض کرو کہ A اور B کوئی دو غیر معدوم سٹ ہیں۔ ایک تفاعل A سے B کو ایک اصول ہے جو xEA کے ہر عنصر کو yEB کے مخصوص عنصر سے جوڑتا ہے۔ ہم $y = f(x)$ کا مطلب اس طرح لیتے ہیں کہ x ، y کا تفاعل ہے۔

سٹ A تفاعل کا **علاقہ** Domain، سٹ B تفاعل کا **معاون علاقہ** Co-Domain کہلاتا ہے۔مزید x کو y کا **خیال** (Image) 'f' کی تحت کہتے ہیں اور x کو y کا **پیش خیال** (Preimage) کہتے ہیں۔A کے تمام خیالوں کا سٹ 'f' کا **حد** (Range) کہلاتا ہے۔غور کرو کہ ایک تفاعل کی حد اُسکے معاون علاقے کا تحتی سٹ ہے۔

اوپر دیئے گئے تفاعل کے جدید ضابطے کو **نکولائی لاباچیوسکی** (Nikolai Labachevsky) اور **پیٹر ڈیریچ لٹ** (Peter dirichlet) نے 1837 کے قریب آزادانہ طور پر پیش کیا تھا۔اس سے پہلے تفاعل کی کوئی واضح تعریف نہیں تھی۔

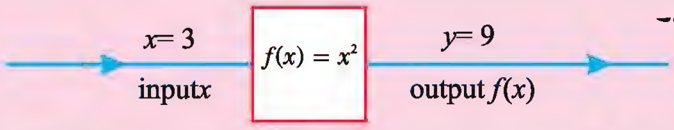
اوپر دی گئی تعریف سے پہلے دی گئی مثال حصہ 1.7 میں ہم غور کرتے ہیں، F = { (C1,1200), (C2,2500), (C3,2500) }
ایک تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے کیونکہ $F \subseteq A \times B$ ایک تفاعل ہے جو اوپر دیئے گئے (i) اور (ii) شرائط پوری کرتا ہے۔

مگر $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$

ایک تفاعل کی نمائندگی نہیں کرتا ہے اوپر دی گئی شرط (ii) پوری نہیں کرتی جیسے $(2500, C_2), (2500, C_3) \in E$.

برائے ذہن نشینی

i) ایک تفاعل 'f' کو ایک مشین تصوّر کیا جاتا ہے جو x کی ہر ایک داخلی قیمت (Input value) کیلئے y میں ایک مخصوص نتیجہ (Output) مُہیّا کرتی ہے۔



ii) ایک تفاعل کی تعریف کے لئے ہم کو ایک علاقہ، معاون علاقہ اور ایک اصول کی ضرورت ہے جو علاقے کے ہر ایک عنصر کو معاون علاقے کے ایک مخصوص عنصر سے رابطہ پیدا کرتا ہے۔

مثال 1.14 فرض کرو کہ A={ 1,2,3,4} اور B = { –1, 2, 3,4,5,6,7,9,10,11,12}

فرض کرو کہ ایک تعلق $R = \{ (1,3), (2,6), (3,10), (4,9)\} \subseteq A \times B$ ہے۔ دِکھاؤ کہ R ایک تفاعل ہے اور اسکا علاقہ، معاون علاقہ اور R کی حد دریافت کیجئے۔

حل : R={ 1,2,3,4}=A کا علاقہ

مزید ہر ایک $x \in A$ کیلئے صرف ایک $y \in B$ اسطرح ہے کہ $y = R(x)$

اسلئے دیا گیا R ایک تفاعل ہے۔ معاون علاقہ ظاہر ہے کہ B ہے۔

چونکہ R(1) = 3, R(2)=6 , R(3)=10 , R(4) = 9 ، R ہے کی حد {3, 6, 10, 9} دی گئی ہے۔

مثال 1.15 کیا ذیل میں دیا گیا ہر ایک پیکانی نقشہ ایک تفاعل کی نُمائندگی کرتا ہے ؟ وضاحت کیجئے۔

(i)

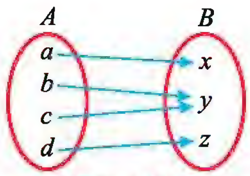


Fig. 1.18

(ii)

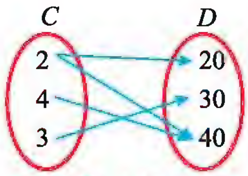


Fig 1.19

حل : پیکانی نقشہ (i) میں A کے ہر ایک عنصر کیلئے ایک مخصوص خیال ہے۔ چنانچہ یہ تفاعل ہے
پیکانی نقشہ (ii) میں عنصر 2 کیلئے دو خیال مثلاً 20 اور 40 ہیں۔ چنانچہ یہ تفاعل نہیں ہے۔

مثال 1.16 فرض کیجئے کہ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ۔ جانچ کیجئے کہ ذیل میں دیا گیا ہر ایک تعلق X سے X کو ایک تفاعل ہے یا نہیں۔ سمجھایئے۔

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

(ii) $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1) \}$ (iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

حل :

(i) یہاں $f = \{ (2,3), (1,4), (2,1),(3,2), (4,4) \}$

'f' ایک تفاعل نہیں ہے 2 ، دومختلف عناصر 3 اور 1 سے ربط رکھتا ہے۔

(ii) دیا گیا $g = \{ (3,1), (4,2), (2,1)\}$

g ایک تفاعل نہیں ہے۔عنصر '1' کوئی خیال نہیں رکھتا۔یعنی علاقہ $x \neq \{ 2,3,4 \} = g$

(iii) اس کے بعد ہم فرض کریں کہ $h = \{ (2,1),(3,4),(1,4),(4,3) \}$

لہٰذا h ایک تفاعل ہے۔ X کا ہر ایک عنصر X کے ایک مخصوص عنصر سے تعلق رکھتا ہے۔

مثال 1.17

ذیل کے تعلقات میں کون سے $A = \{ 1,4,9,16\}$ سے $B = \{-1,2,-3,-4,5,6\}$ کو تفاعلات ہیں ؟ اگر تفاعل ہو تو اسکی حد لکھئے۔

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

حل :

(i) ہمیں $f_1 = \{ (1,-1),(4,2),(9,-3),(16,-4) \}$ حاصل ہے

چونکہ A کا ہر ایک عنصر B کے ایک مخصوص عنصر سے تعلق رکھتا ہے۔ '$f1$' ایک تفاعل ہے۔

$f1$ کی حد $\{-1,2,-3,-4\}$ ہے

(ii) یہاں $f_2 = \{ (1,-4),(1,-1),(9,-3),(16,-2) \}$

f_2 تفاعل نہیں ہے کیونکہ 1 خیال کے دو مختلف عناصر -4 اور -1 سے تعلق رکھتا ہے۔یہ بھی غور کریں کہ f_2 تفاعل نہیں ہے، کیونکہ تفاعل 4 کا خیال نہیں ہے۔

(iii) فرض کرو کہ $f_3 = \{ (4,2), (1,2), (9,2) , (16,2) \}$

کیونکہ A کا ہر ایک عنصر B کے ایک مخصوص عنصر سے ربط رکھتا ہے۔چنانچہ f_3 ایک تفاعل ہے۔

$f3$ کی حد $= \{2\}$

(iv) ہمارے پاس $f_4 = \{(1,2),(4,5),(9,-4),(16,5)\}$ ہے۔

چونکہ A کا ہر ایک عنصر B کے ایک مخصوص عنصر سے متعلقہ ہے۔ $f4$ ایک تفاعل ہے۔

$f4$ کی حد $= \{2, 5, -4\}$

مثال 1.18 فرض کریں کہ $|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ -x & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$ جس میں $x \in \mathrm{R}$ ہے۔

کیا تعلق $\{(x,y) \mid y = |x|, x \in \mathrm{R}\}$ ایک تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ اسکی حد معلوم کیجئے۔

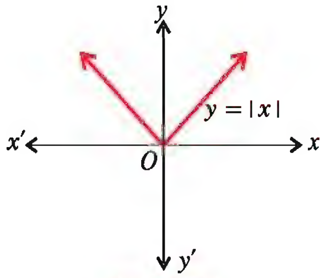


Fig. 1.20

حل : x کی ہر ایک قیمت کیلئے ایک مخصوص قیمت $y = |x|$ ہے۔ اسلئے دیا گیا تعلق تفاعل ہے۔

تفاعل کا علاقہ R کے مجموعہ کے تمام حقیقی اعداد ہیں۔

چونکہ $|x|$ ہمیشہ یا تو صفر ہے یا مثبت ہے x کے ہر ایک حقیقی عدد کیلئے اس تفاعل کے تحت

ہر ایک حقیقی عدد کو خیال کے طور پر حاصل کر سکتے ہیں۔

اس طرح اسکی حد غیر منفی حقیقی اعداد کا سٹ ہوگی (یا تو مثبت یا صفر)

برائے ذہن نشینی

تفاعل $y = |x|$ کی تعریف $y = |x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ -x & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$ سے بھی کی جاتی ہے $x \in \mathrm{R}$

اس تفاعل کو **ماڈولس** (modulus) یا **مطلق قیمت تفاعل** (absolute value function) کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر $|-8| = -(-8) = 8$ نیز $|8| = 8.$

1.8.1 تفاعل کی نمائندگی : Representation of functions

ایک تفاعل کی نمائندگی اس طرح کر سکتے ہیں۔

(i) ترتیب وار جوڑیوں کا (مجموعہ) سٹ (ii) ایک جدول (iii) ایک پیکانی نقشہ (iv) ایک ترسیم

$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ ایک تفاعل کو لو

(i) سٹ $f = \{(x,y) ; y = f(x), x \in \mathrm{A}\}$ کی تمام ترتیب وار جوڑیاں تفاعل کی نمائندگی کرتی ہیں۔

(ii) x کی قیمتیں اور $'f'$ کے تحت انکے بالترتیب خیال ایک جدول کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں

(iii) ایک پیکانی نقشہ $'f'$ کے علاقے کے عناصر کو انکے قائم مقام خیالات کو تیر کے نشانات سے ظاہر کرتا ہے۔

(iv) $f = \{(x,y) ; y = f(x), x \in \mathrm{A}\}$ کی ترتیب وار جوڑیوں کے ذخیرہ کو ایک سطح پر مرتسم کیا جاتا ہے۔

ان تمام نقطوں کا مجموعہ f کی ترسیم ہے۔ آیئے ہم تفاعلات کی مختلف قسموں کی نمائندگی چند مثالوں کے ذریعے سمجھائیں۔

ہم کئی تفاعلات کے لئے اس کی ترسیم حاصل کر سکتے ہیں۔ مگر ہر ایک ترسیم تفاعل کی نمائندگی نہیں کریگی۔ ذیل کے جانچ (test) کی مدد سے ہم دی گئی ترسیم کے تفاعل ہونے یا نا ہونا معلوم کر سکتے ہیں۔

1.8.2 عمودی خطی جانچ (Vertical line test)

اگر ہر ایک عمودی خط ترسیم کو زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر قطع کرے تو ترسیم تفاعل کی نمائندگی کرتی ہے۔

غور کریں

یہ ممکن ہے کہ چند عمودی خطوط ترسیم کو قطاع نہیں کر سکتے جو کہ درست ہے۔ اگر کوئی ایک بھی عمودی خط جو ترسیم کو ایک سے زیادہ نقاط پر ملتا ہے تو وہ ترسیم تفاعل کی نمائندگی نہیں کر سکتی کیونکہ اس حالت میں ہمیں x کی ایک ہی قیمت کیلئے y کی کم از کم دو قیمتیں حاصل ہونگی۔ مثال کے طور پر $y^2 = x$ ایک تفاعل نہیں ہے۔

مثال 1.19

عمودی خط کی جانچ کی مدد سے معلوم کرو کہ کونسی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے۔

(i)

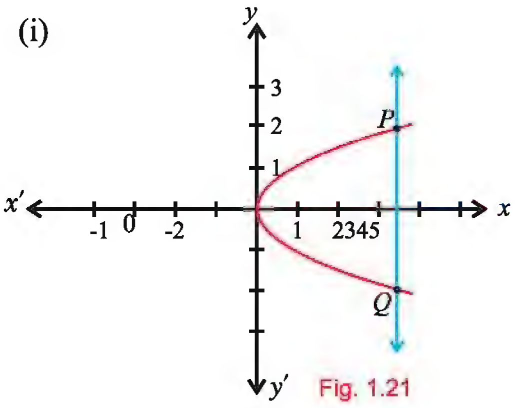


Fig. 1.21

(ii)

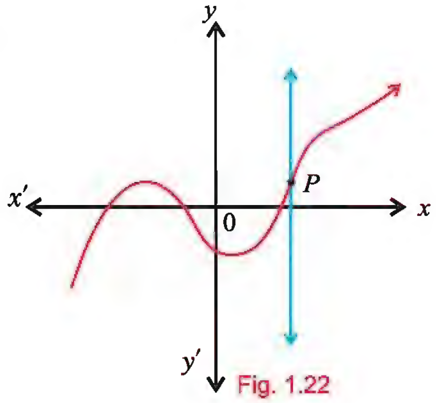


Fig. 1.22

(iii)

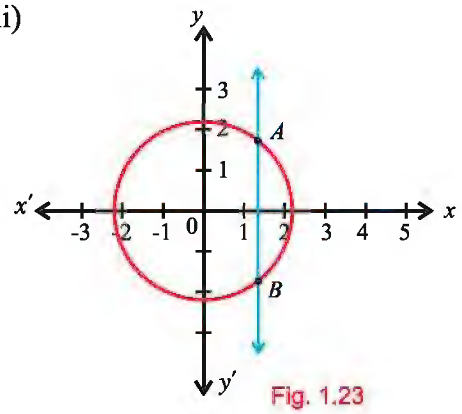


Fig. 1.23

(iv)

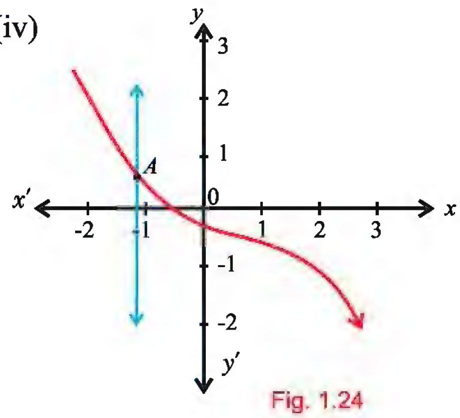


Fig. 1.24

حل :

(i) دی گئی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی نہیں کرتی ہے کیونکہ عمودی خط ترسیم کو دونقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔

(ii) دی گئی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے کیونکہ کوئی بھی عمودی خط ترسیم کو صرف ایک نقطہ P پر قطع کرتا ہے۔

(iii) دی گئی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی نہیں کرتی ہے کیونکہ عمودی خط ترسیم کو دونقاط A ، B دونقاط پر قطع کرتا ہے۔

(iv) دی گئی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے کیونکہ ترسیم عمودی خطی جانچ کی شرط پوری کرتی ہے۔

مثال 1.20

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ دوسٹ ہیں۔ $f : A \rightarrow B$ ایک تفاعل ہے جو $f(x) = 2x+1$ سے دیا گیا ہے۔اس تفاعل کی نُمائندگی کیجیے (i) ترتیب وار جوڑیوں کے طور پر (ii) جدول کے طور پر

(iii) پیکانی نقشہ سے (iv) ترسیم سے

حل : $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1, f(1) = 2(1)+1 = 3$, $f(2) = 2(2) + 1 = 5, f(3) = 2(3) + 1 = 7$

(i) پیکانی نقشہ (Arrow diagram)

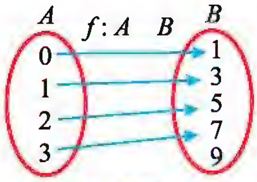


Fig. 1.25

آیئے ہم پیکانی نقشے سے f کی نمائندگی کریں۔
ہم دو بند منحنیاں کھینچتے ہیں جو سٹ A اور B کی نمائندگی کرتی ہیں۔
پھر A کے ہر ایک عنصر کو B میں اسکے مخصوص خیال سے
تعلق کو تیر کے نشان سے ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) جدولی شکل

آیئے ہم جدول کے استعمال سے جیسا کہ نیچے دِکھایا گیا ہے 'f' کی نمائندگی کرتے ہیں

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

(iii) ترتیب وار جوڑیاں :

دیئے گئے تفاعل 'f' کو ترتیب وار جوڑیوں سٹ سے نمائندگی کرسکتے ہیں۔

$f = \{ (0,1), (1,3), (2,5), (3,7) \}$

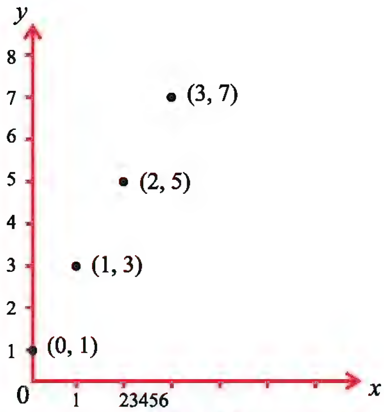


Fig. 1.26

(iv) ترسیم : دیا گیا ہے

$f = \{x, f(x) | x \in A\} = \{ (0,1), (1,3), (2,5), (3,7) \}$

اب نقاط (2, 5) ، (1,3) ، (0, 1) اور (3, 7)
کو نیچے دِکھائے ہوئے طریقے پر مرتسم کریں۔
تمام نقاط کی مُجملہ (Totality) تفاعل کی ترسیم کی نمائندگی کرتی ہے۔

1.8.3 تفاعل کی قسمیں :

تفاعل کی خصوصیات بنیاد پر ہم تفاعلات کو چند قسموں میں تقسیم کرتے ہیں۔

(i) ایک ۔ ایک تفاعل (one-one function)

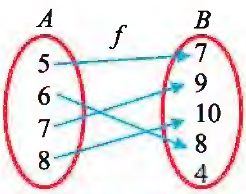


Fig. 1.27

فرض کیجئے $f : A \rightarrow B$ ایک تفاعل ہے تفاعل 'f' **ایک ۔ ایک تفاعل** کہلاتا ہے اگر A کے علحدہ عناصر B کے علحدہ عناصر سے تعلق رکھتے ہیں۔ یعنی ہم 'f' کو ایک ۔ ایک تفاعل کہہ سکتے ہیں جبکہ A میں $u \neq v$ ہمیشہ لاگو ہوتا ہے۔ $f(u) \neq f(v)$ دوسرے الفاظ میں 'f' ایک ۔ ایک تفاعل ہے اگر B کا کوئی بھی عنصر A کے ایک سے زیادہ عناصر سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔

ایک ۔ ایک تفاعل **دروں تفاعل** (injective function) بھی کہلاتا ہے۔ اوپر کا خاکہ ایک ۔ ایک تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے۔

(ii) بروں تفاعل (on to function)

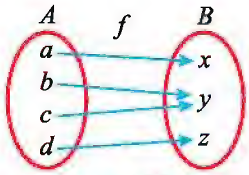


Fig. 1.28

ایک تفاعل $f : A \to B$ اس وقت **بروں تفاعل** ہوگا اگر B کے ہر ایک عنصر کیلئے A میں پیشِ خیال ہو۔یعنی ایک تفاعل 'f' بروں کہلائیگا اگر ہر ایک $b \in B$ کیلئے کم از کم ایک عنصر $a \in A$ ہو اسطرح کہ $f(a) = b$ یہ مساوی ہے اسطرح کہنے پر B ، 'f' کی حد ہے۔**بروں تفاعل** surjective function بھی کہلاتا ہے۔اوپر کے خاکے میں 'f' ایک بروں تفاعل ہے۔

(iii) ایک ۔ ایک اور بروں تفاعل (one - one and onto function)

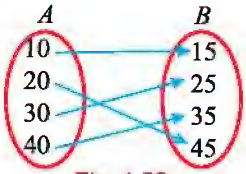


Fig. 1.29

ایک تفاعل $f : A \to B$ ایک ۔ ایک اور بروں یا **دوہرا تفاعل** (bijective function) کہلاتا ہے اگر 'f' دونوں ایک ۔ ایک اور بروں تفاعل ہو۔چنانچہ $f : A \to B$ ایک ۔ ایک اور بروں تفاعل ہے اگر 'f' میپنگ کرتا ہے A کے مختلف عناصر کو B کے مختلف خیال سے اور B کا ہر ایک عنصر A کا کوئی پیش خیال ہوتا ہے۔

غور کریں

(i) $f : A \to B$ بروں ہے صرف اور صرف $f = B$ کی وسعت ہو۔

(ii) $f : A \to B$ ایک ۔ ایک اور دروں ہے،اس کا مطلب A میں $a_1 = a_2$ ہے،صرف اور صرف اگر $f(a_1) = f(a_2)$ اور B کا ہر ایک عنصر A میں صرف ایک پیشِ خیال رکھتا ہو۔

(iii) اگر $f : A \to B$ ایک دوہرا تفاعل bijective function ہے تو A اور B دونوں محدود سٹ ہوں تو ان کی بنیادیت Cardinalities یکساں ہوں گے۔ خاکہ 1.29 میں تفاعل f ایک-ایک اور برون ہے۔

(iv) اگر f : A B ایک دوسرا تفاعل ہو تو A اور B معادل مجموعے ہوں گے۔

(v) ایک-ایک اور بروں تفاعل کو ایک-ایک مطابقت بھی کہتے ہیں۔

(iv) مستقل تفاعل (constant function)

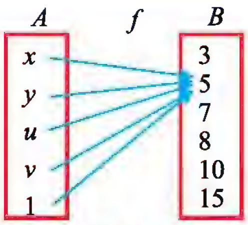


Fig. 1.30

ایک تفاعل $f : A \to B$ **مستقل تفاعل** کہلاتا ہے اگر A کا ہر ایک عنصر B میں ایک ہی خیال رکھتا ہے۔مستقل تفاعل کی حد ایک اکائی والا (singleton set) سٹ ہے۔

فرض کرو کہ $A = \{x,y,u,v,1\}$ ، $B = \{3,5,7,8,10,15\}$

$f : A \to B$ کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے کہ $f(x) = 5$ ، A کے ہر ایک عنصر کیلئے $x \in A$ دیا گیا ہے خاکہ مستقل تفاعل کی نُمائندگی کرتا ہے۔

(v) متماثل تفاعل (Identity function)

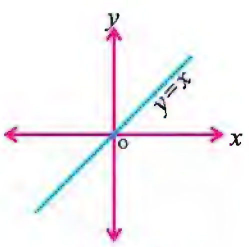


Fig. 1.31

فرض کیجئے A ایک غیر معدوم سٹ ہے ایک تفاعل $f : A \to A$ یکساں تفاعل یا **متماثل تفاعل** A کا ہوگا اگر تمام $a \in A$ کیلئے $f(a) = a$ ہو۔یعنی متماثل تفاعل میں A کا ہر عنصر خود ہی سے تعلق رکھے گا۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ $A = R$ ہے۔تفاعل $f : R \to R$ کی تعریف $f(x) = x$ تمام $x \in R$ کے لئے ایک متماثل تفاعل R پر ہے۔اوپر کا خاکہ A پر متشابہ تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے۔

مثال 1.21 فرض کرو کہ $A = \{1,2,3,4,5\}$ ، $B = N$ اور $f : A \to B$ کی وضاحت $f(x) = x^2$ سے کی جاتی ہے۔ 'f' کی حد معلوم کیجئے۔ تفاعل کی قسم پہچانئے۔

حل : یہاں $A = \{1,2,3,4,5\}$ اور $B = \{1,2,3,4,....\}$

$f(x) = x^2$ اور $f : A \to B$ دیا گیا ہے

$$f(1) = 1^2 = 1 \;;\; f(2) = 2^2 = 4 \;; f(3) = 9 \;\; ; f(4) = 16 \;\; ; f(5) = 25$$

f کی حد $= \{1,4,9,16,25\}$

چونکہ مختلف عناصر مختلف خیالات سے متعلق ہیں یہ ایک ۔ ایک تفاعل ہے۔مگر بروں نہیں ہے۔کیونکہ $3 \in B$ مگر یہاں $x \in A$ کوئی بھی عنصر اس طرح نہیں ہے جو $f(x) = x^2–3$ ہو۔

برائے ذہن نشینی

ایک تفاعل $g : R \to R$ کی تعریف $g(x) = x^2$ سے کی جاتی ہے یہ ایک ایک نہیں ہے کیونکہ اگر $u = 1$ اور $v = –1$ ہو $u \neq v$ مگر $g(u) = g(1) = 1 = g(–1) = g(v)$ اسلئے صرف ضابطہ ہی تفاعل کو ایک ۔ ایک اور بروں نہیں بناتا۔

مثال 1.22

ایک تفاعل $f :[1,6) \to R$ کی وضاحت ذیل کی طرح ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & 1 \le x < 2 \\ 2x - 1 & 2 \le x < 4 \\ 3x^2 - 10 & 4 \le x < 6 \end{cases}$$

(یہاں , $[1 , 6) = \{ x \in R : 1\le x < 6\}$)

قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $f(5)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(1)$

(iv) $f(2) – f(4)$ (v) $2 f(5) – 3 f(1)$

حل :

(i) آیئے $f(5)$ دریافت کرتے ہیں۔

چونکہ 5 ، 4 اور 6 کے درمیان واقع ہے ہم کو $f(x) = 3x^2 –10$ استعمال کرنا چاہئے۔

اس طرح $f(5) = 3(5)^2 –10 = 65$

(ii) $f(3)$ دریافت کرنے کیلئے غور کریں کہ 3 ، 2 اور 4 کے درمیان واقع ہے اس لئے ہم $f(3)$ محسوب کرنے کے لئے $f(x) = 2x –1$ استعمال کرتے ہیں۔ اس طرح $f(3) = 2(3) –1 =5$

(iii) آیئے $f(1)$ دریافت کرتے ہیں۔

اب 1 وقفہ $1 \le x < 2$ میں ہے۔ $\therefore$ ہمیں $f(1)$ معلوم کرنے کے لئے $f(x) = 1+x$ استعمال کرنا چاہئے۔

$$f(1) = 1+1 = 2$$

(iv) $f(2) - f(4)$

اب 2 ، 4 > $2 \le x < 4$ کے وقفے میں ہے اور اسلئے ہم $f(x) = 2x - 1$ استعمال کرتے ہیں۔ چنانچہ

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3.$$

مزید 4 ، 6 > $4 \le x < 6$ کے وقفے میں ہے چنانچہ ہم $f(x) = 3x^2 - 10$ استعمال کرتے ہیں۔ اسلئے

$$f(4) = 3(4)^2 - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38$$

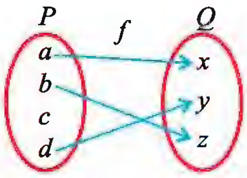
چنانچہ $f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35$

(v) $2f(5) - 3f(1)$ محسوب کرنے کے لئے ہم اُن قیمتوں کو استعمال کریں گے، جنھیں ہم پہلے ہی (i) اور (iii) میں محسوب کر چکے ہیں۔ لہٰذا $2f(5) - 3f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124$

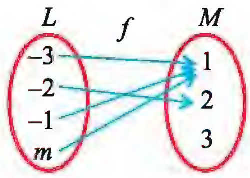
مشق 1.4

1. بیان کرو کہ کیا ذیل میں دیے گئے خاکے تفاعل کی تعریف کرتے ہیں۔ اپنے جواب کے لئے جواز پیش کیجئے۔

(i)



(ii)



2. دیے گئے تفاعل $f = \{ (1,3), (2,5), (4,7), (5,9), (3,1) \}$ کیلئے علاقہ اور حد لکھئے۔

3. فرض کرو کہ $A = \{ 10, 11, 12, 13, 14 \}$; $B = \{ 0, 1, 2, 3, 5 \}$ اور $f_i : A \to B$, $i = 1,2,3.$ ذیل کے لئے تفاعل کی قسمیں بیان کیجئے۔ (وجہ پیش کیجئے)

$$f_1 = \{ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3) \}$$
$$f_2 = \{ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1) \}$$
$$f_3 = \{ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5) \}$$

4. اگر $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$; $Y = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ اور $f : X \to Y$ ذیل میں کون سے تعلقات X سے Y کو تفاعلات ہیں؟ تمہارے جواب کیلئے وجہ بتاؤ۔ اگر یہ ایک تفاعل ہے تو اسکی قسم بیان کرو۔

(i) $R_1 = \{ (x, y) | y = x + 2, x \in X, y \in Y \}$

(ii) $R_2 = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5) \}$

(iii) $R_3 = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7) \}$

(iv) $R_4 = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$

5. اگر $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ ایک متماثل تفاعل کی نمائندگی کرتا ہو تو a, b, c اور d کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

6. $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ اور $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in A\right\}$ ، 'f' کی حد لکھئے۔ کیا f, A سے A کو ایک تفاعل ہے؟

7. فرض کرو کہ $f = \{(2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3)\}$ ایک تفاعل ہے۔

$A = \{-1, 0, 2, 3, 5, 7\}$ سے $B = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ کو کیا یہ

(i) ایک-ایک تفاعل ہے (ii) بروں تفاعل ہے۔ (iii) ایک-ایک اور بروں تفاعل ہے؟

8. تفاعل میں 2 اور 3 کے پیشِ خیال لکھئے. $f = \{(12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17)\}$.

9. ذیل کی جدول ایک تفاعل $A = \{5, 6, 8, 10\}$ سے $B = \{19, 15, 9, 11\}$ کو تفاعل کی نمائندگی کرتی ہے۔

جہاں $f(x) = 2x - 1$ ہے۔ a اور b کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

x	5	6	8	10
$f(x)$	a	11	b	19

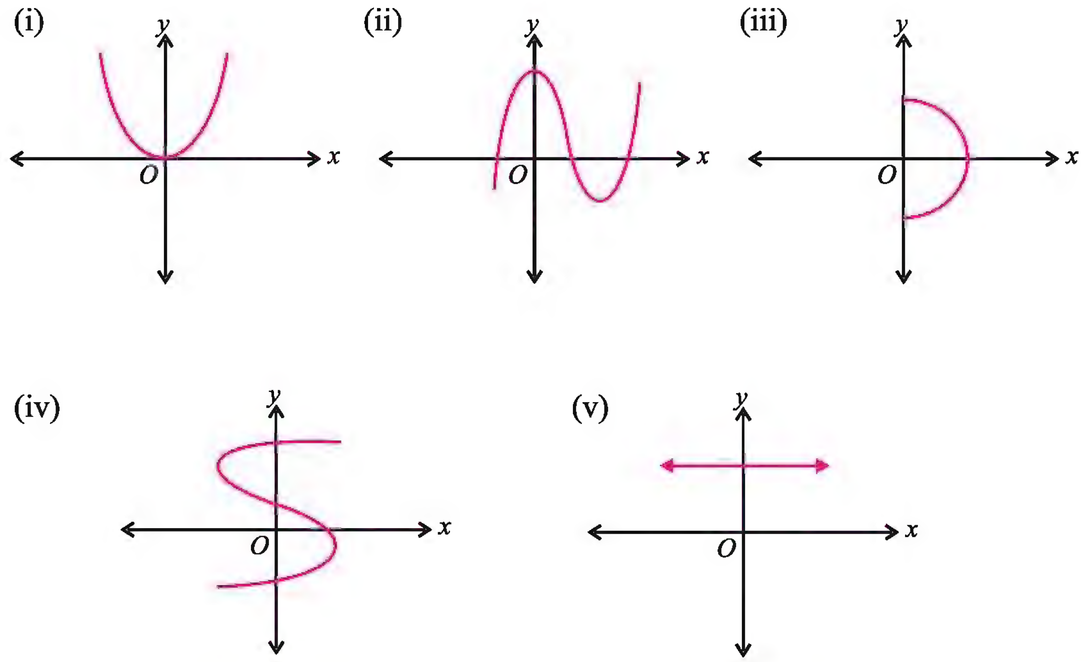
10. فرض کرو کہ $A = \{5, 6, 7, 8\}$ ، $B = \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$ اور

$$f = \{(x, y) : y = 3 - 2x,\ x \in A,\ y \in B\}$$

(i) f کے عناصر لکھئے۔ (ii) معاون علاقہ کیا ہے؟

(iii) حد کیا ہے؟ (iv) تفاعل کی قسم کی نشان دہی کیجئے۔

11. ذیل کی ترسیم کیا تفاعل کی نمائندگی کرتی ہے؟ بیان کیجئے۔ تمہارے جواب کیلئے وجہ پیش کیجئے۔



12. تفاعل کی نمائندگی $f = \{ (-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3) \}$ ذیل کی طرح کیجئے
(i) ایک جدول اور (ii) ایک پیکانی نقشہ سے

13. فرض کروکہ $A = \{ 6, 9, 15, 18, 21 \}$ ، $B = \{ 1, 2, 4, 5, 6 \}$ اور $f : A \to B$ کی تعریف ہے۔
$f(x) = \frac{x-3}{3}$ میں f کی نمائندگی کیجئے
(i) پیکانی نقشہ سے (ii) ترتیب وار جوڑیوں کی طرح (iii) جدول کی طرح (iv) ترسیم سے

14. فرض کروکہ $A = \{4, 6, 8, 10\}$ ، $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$
اگر $f : A \to B$ کی تعریف $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ سے کی گئی ہے تو 'f' کو
(i) پیکانی نقشہ سے (ii) ایک ترتیب وار جوڑیوں کی مجموعہ سے اور (iii) ایک جدول سے نمائندہ کیجئے۔

15. ایک تفاعل $f : [-3,7) \Longrightarrow \mathbb{R}$ کی تعریف ذیل کی طرح ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4 \\ 2x - 3; & 4 < x \le 6 \end{cases}$$

دریافت کیجئے

(i) $f(5) + f(6)$ (ii) $f(1) - f(-3)$
(iii) $f(-2) - f(4)$ (iv) $\dfrac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$.

16. ایک تفاعل $f : [-7,6) \Longrightarrow \mathbb{R}$ کی تعریف ذیل میں اسطرح ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & -7 \le x < -5 \\ x + 5 & -5 \le x \le 2 \\ x - 1 & 2 < x < 6 \end{cases} .$$

دریافت کیجئے

(i) $2\,f(-4) + 3\,f(2)$ (ii) $f(-7) - f(-3)$ (iii) $\dfrac{4\,f(-3) + 2\,f(4)}{f(-6) - 3\,f(1)}$

مشق 1.5

صحیح جواب منتخب کیجئے۔

1. دوسٹ A اور B کیلئے، $A \cup B = A$ ہے اگر صرف اور صرف
(A) $B \subseteq A$ (B) $A \subseteq B$ (C) $A \neq B$ (D) $A \cap B = \phi$

2. اگر $A \subset B$ ہو تو $A \cap B =$
(A) B (B) $A \backslash B$ (C) A (D) $B \backslash A$

3. کوئی دوسٹ P اور Q کیلئے $P \cap Q =$
(A) $\{x : x \in P \text{ or } x \in Q\}$ (B) $\{x : x \in P \text{ and } x \notin Q\}$
(C) $\{x : x \in P \text{ and } x \in Q\}$ (D) $\{x : x \notin P \text{ and } x \in Q\}$

4. اگر $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, s, t, u\}$ ہوتو $A \setminus B =$

(A) $\{p, q\}$ (B) $\{t, u\}$ (C) $\{r, s\}$ (D) $\{p, q, r, s\}$

5. اگر $n[p(A)] = 64$, ہوتو n(A)

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

6. کوئی تین سٹ A ، B اور C کیلئے $A \cap (B \cup C) =$

(A) $(A \cup B) \cup (B \cap C)$ (B) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(C) $A \cup (B \cap C)$ (D) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

7. کوئی دوسٹ A اور B کیلئے $\{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \cap (A \cap B)$

(A) ϕ (B) $A \cup B$ (C) $A \cap B$ (D) $A' \cap B'$

8۔ درج ذیل میں سے کونسا صحیح نہیں ہے؟

(A) $A \setminus B = A \cap B'$ (B) $A \setminus B = A \cap B$

(C) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B'$ (D) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

9. کسی بھی تین سٹ A,B اور C کے لئے B\(AUC) ہے

(A) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (B) $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$

(C) $(B \setminus A) \cap (A \setminus C)$ (D) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$

10۔ اگر $n(A) = 20$، $n(B) = 30$ اور $n(A \cup B) = 40$ ہوتو $n(A \cap B)$ مساوی ہے۔

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70.

11۔ اگر $\{(x,2), (4,y)\}$ ایک مشابہ تفاعل ہوتو (x,y) ہے

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

12۔ اگر $\{(7,11), (5,a)\}$ ایک متماثل تفاعل کو ظاہر کرتا ہے تو 'a' کی قیمت

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

13. دیا گیا ہے $f(x) = (-1)^x$، N سے Z کو ایک تفاعل ہوتو f کی حد ہے۔

(A) $\{1\}$ (B) N (C) $\{1, -1\}$ (D) Z

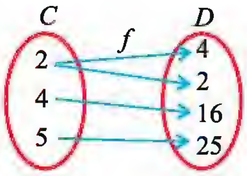
14. اگر $f = \{(6,3),(8,9),(5,3),(-1,6)\}$ ہوتو 3 کے پیشِ خیال ہیں۔

(A) 5 اور -1 (B) 6 اور 8 (C) 8 اور -1 (D) 6 اور 5

15. فرض کروکہ $A = \{1, 3, 4, 7, 11\}$، $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9\}$ اور $f: A \to B$ کو دیا گیا ہے۔
تو 'f' ہے۔

(A) ایک ـ ایک (B) بروں (C) دوہرا (D) تفاعل نہیں ہے

16۔ دیے گئے خاکے نُمائندگی کرتے ہیں



(A) بروں تفاعل (B) مستقل تفاعل
(C) ایک ۔ ایک اور بروں تفاعل (D) تفاعل نہیں ہے

17۔ اگر $A = \{5, 6, 7\}$، $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $f : A \to B$ کو ظاہر کرتا ہے $f(x) = x - 2$ ہو تو 'f' کی حد ہے۔

(A) $\{1, 4, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{2, 3, 4\}$ (D) $\{3, 4, 5\}$

18۔ اگر $f(x) = x^2 + 5$ ہو تو $f(-4)$ ہے۔

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19۔ اگر ایک تفاعل کی حد ایک اکائی سٹ ہے تو یہ ہے

(A) ایک مستقل تفاعل (B) ایک متماثل تفاعل (C) ایک دوہرا تفاعل (D) ایک ۔ ایک تفاعل

20۔ اگر $f : A \to B$ ایک دُہرا تفاعل ہے اور اگر $n(A) = 5$ ہو تو $n(B)$ مساوی ہے

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

یاد رکھنے کے نکات

سٹ

- ایک مجموعہ خوب واضح اشیاء کا ذخیرہ ہے۔
  - سٹوں کا اتحاد متبادلہ اور مربوطی ہے۔
  - سٹوں کا تقاطع متبادلہ اور مربوطی ہے۔
  - سٹ کا فرق متبادلہ نہیں ہے۔
  - جب سٹ باہم غیر منسلک ہوں تو سٹ کا فرق مربوطی ہے۔
- تقسیمی کُلیے
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- سٹ کے فرق سے متعلق ڈی مارگن اصول
  - $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
  - $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- اِتمام سے متعلق ڈی مارگن اصول
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- مجموعوں کے اتحاد کیلئے بُنیادیت کے ضابطے۔
  - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  - $n(A \cup B \cup C)$
    $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

تفاعلات

- A اور B کے محددی حاصل ضرب کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}.$$

- R سے A سے B کی جانب ایک تعلق، A×B کا ایک غیر خالی تحتی مجموعہ ہے۔ یعنی $R \subseteq A \times B$ ہے۔
- ایک تفاعل $f: X \to Y$ کی تعریف کی جاتی ہے اگر ذیل کے شرائط رکھتے ہوں۔
  ہر ایک $x \in X$ صرف ایک $y \in Y$ سے تعلق رکھتا ہے۔
- ہر تفاعل کو ایک ترسیم کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جب کہ عام طور پر اس کا معکوس صحیح نہیں ہے۔
- ایک عمودی خط ترسیم کو صرف ایک نقطہ پر قطاع کرتی ہے تو وہ ترسیم تفاعل کی نمائندگی کرتی ہے۔
- ایک تفاعل کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
  - ایک ترتیب وار جوڑی
  - ایک تیر کا نشان
  - ایک جدول اور
  - ایک ترسیم
- ماڈولس یا مطلق تفاعلی قیمت $y = |x|$ کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ -x & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

- تفاعل کی قسمیں ہیں
  - ایک ۔ ایک تفاعل - (واضح عناصر کے واضح خیال ہوں گے)
  - بروں تفاعل - (حد اور معاون علاقہ دونوں مساوی ہیں)
  - دُہرا تفاعل - (ایک ۔ ایک اور بروں دونوں ہے)
  - مستقل تفاعل - (ایک اکائی والے سٹ کی حد)
  - مشابہ تفاعل - (جو ہر ایک داخلہ کو ایسے ہی چھوڑ دیتا ہے)

کیا تم جانتے ہو؟

USA کی کلے میتھے میٹکس انسٹی ٹیوٹ نے 2000ء میں ملینیم پرائز پرابلمس کے نام سے سات مسئلے پیش کئے۔ اگست 2010ء تک ان میں سے چھ مسئلوں کا حل نہیں نکالا گیا۔ ان میں سے کسی بھی ایک مسئلہ کا درست حل پیش کرنے پر انسٹی ٹیوٹ کی جانب سے ایک ملین ڈالر انعام دیا جائے گا۔ (Poincare Conjecture) نامی صرف ایک مسئلہ کو 2010ء میں روس کے ایک ریاضی دان گری گوری پیریل مین نے حل کیا ہے۔ مگر اس نے ملینیم انعام لینے سے انکار کر دیا۔ یہاں پر Conjecture سے مراد ایک ریاضی مسئلہ جو ثابت یا غیر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

2

حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے

SEQUENCES AND SERIES OF REAL NUMBERS

Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics - C.F. Gauss

- تمہید
- تواتر (سیکوئنس)
- حسابی سلسلہ (A.P.)
- ہندسی سلسلہ (G.P.)
- سلسلے

2.1 تمہید

اس حصے میں ہم حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے کے متعلق گفتگو کریں گے۔ حساب کی ابتدا ہی سے تواتر حساب کا ایک بنیادی جز رہا ہے۔ حقیقی زندگی کے حسابی افعال میں بھی وہ دیگر نظریات کو پیش کرنے میں مددگار ثابت ہوئے ہیں۔

فرض کرو کہ حرف N اور R تمام مثبت سالم اعداد اور حقیقی اعداد کے مجموعے ہیں۔ زندگی کے بعض مرحلوں کو فرض کریں۔

(i) ISRO کے سائنس دانوں کی ایک ٹیم نے وقفہ سے ایک مدت کے دوران سطح سمندر سے سیارے کی بلندی کا مشاہدہ کر کے اسے درج کیا ہے۔

(ii) وزارت ریلوے یہ جاننا چاہتی ہے کہ روزانہ چنئی ریلوے اسٹیشن کو کتنے لوگ استعمال کرتے ہیں۔ اس لئے وہ 180 دن تک روزانہ چنئی سنٹرل اسٹیشن میں داخل ہونے والے لوگوں کی تعداد درج کرتے ہیں۔

(iii) نویں جماعت کا ایک دلچسپ طالب علم غیر ناطق عدد $\sqrt{5} = 2.236067978.....$ کے اعشاریہ کے تمام ہندسے معلوم کرنا چاہتا ہے۔ اور وہ انہیں اس طرح سے لکھتا ہے۔ 2,3,6,0,6,7,9,7,8,......

(iv) ایک طالب علم شمار کنندہ میں 1 سے شروع ہونے والے تمام مثبت کسری اعداد کو جاننا چاہتا ہے۔ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$.

(v) حساب کے استاد اپنی کلاس کے طالب علموں کو حروف تہجی کے مطابق مارکس لکھتے ہیں جیسے 75,95,67,35,58,47,100,89,85,60

لیونارڈو پیسانو
(فیبو ناکی)
(1170-1250)
اٹلی

قدیم حسابوں کی تجدید میں فیبو ناکی نے ایک اہم رول ادا کیا ہے۔ ریاضی دانوں کو اس کا نام اس لئے معلوم ہے کہ اس کے نام سے ایک عددی تواتر موسوم ہے جسے 'فیبو ناکی اعداد' کہتے ہیں۔ حالانکہ اس نے یہ اعداد ایجاد نہیں کئے بلکہ انہیں اس نے بطور مثال استعمال کیا۔

(vi) وہی استاداں مارکس کو صعودی ترتیب میں اس طرح لکھتے ہیں۔

35,47,58,60,67,75,85,89,95,100

مندرجہ بالا ہر ایک مثال میں حقیقی اعداد کے مجموعے ایک ترتیب میں دئے گئے ہیں۔

نوٹ کیجئے کہ (iii)اور (iv) کی فہرست میں لامحدود اعداد موجود ہیں۔ (ii)، (v) اور (vi) میں صرف محدود اعداد کی رقمیں ہیں، مگر (v) اور (vi) میں اعداد کے اُسی مجموعے کو مختلف ترتیب میں دیا گیا ہے۔

2.2 تواتر Sequence

تعریف

حقیقی اعداد کی فہرست ایک خاص ترتیب میں ہو تو اس کو **تواتر** کہتے ہیں۔

(i) اگر کسی تواتر میں صرف محدود اعداد (رقمیں) ہوں تو اس کو **محدود تواتر** کہیں گے۔

(ii) اگر کسی تواتر میں لامحدود اعداد (رقمیں) ہوں تو اس کو **لامحدود تواتر** کہیں گے۔

محدود تواتر کو $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ یا $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور

لامحدود تواتر کو $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ یا $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

جس میں a_k اس تواتر کے k ویں رقم کو ظاہر کرتا ہے۔ مثال کے طور پر a_7 اس تواتر کی 7 ویں رقم کو ظاہر کرتا ہے۔

نوٹ کریں کہ مندرجہ بالا مثالوں میں (ii)، (v) اور (vi) محدود تواتر ہیں جب کہ (iii)اور (iv) لامحدود تواتر ہیں۔

مشاہدہ کریں کہ

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کسی تواتر میں اعداد کا ایک مجموعہ ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ اس تواتر میں موجود اعداد کی شناخت اس کے **پہلے ممبر، دوسرے ممبر اور تیسرے ممبر** اسی طرح جاری رہتا ہے۔ ہم تواتر کی بعض مثالیں پہلے ہی دیکھ چکے ہیں۔ آیئے بعض اور مثالوں کو فرض کریں۔

(i) $2, 4, 6, 8, \cdots, 2010.$ (محدود رقموں کے اعداد)

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ (1 اور 1– کے درمیان رقمیں اہتزاز کرتے ہیں)

(iii) $\pi, \pi, \pi, \pi, \pi.$ (رقمیں یکساں ہیں، اس طرح کے تواتر مستقل تواتر کہلاتے ہیں)

(iv) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots$ (تمام اولیٰ اعداد کی فہرست)

(v) $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \cdots .$

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$

کسی سکہ کو n ویں مرتبہ اچھالے جانے پر سر یا پشت حاصل ہونے کے مطابق $a_n = 0$ یا 1 ہوگا۔

مندرجہ بالا مثالوں میں (i)اور (iii) محدود تواتر ہیں اور دیگر لامحدود تواتر ہیں۔ کوئی آسانی سے اسے پہچان سکتا ہے۔ یعنی (i) سے (v) تک ترتیب وار یا کسی قانون کے مطابق فہرست کئے گئے ہیں۔ چنانچہ ہم تواتر میں کوئی رقم ایک مخصوص مقام پر دیکھ سکتے ہیں۔

مگر (vi) میں ہم یہ پیشین گوئی نہیں کر سکتے ہیں کہ اس کی ایک خاص رقم کتنی ہے۔ مگر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ وہ رقم یا تو 1 ہے یا 0 ۔ یہاں پر ہم نے اصطلاح Pattern کو کسی تواتر میں موجود رقم سے پہلے والے عناصر معلوم ہونے پر ہی تواتر کی n ویں رقم کو پہچاننے کے لئے لیا گیا ہے۔ عام طور پر تواتر کو تفاعل کی نظر سے بھی دیکھا گیا ہے۔

2.2.1۔ تواتر، تفاعل کے نقطہ نظر سے 2.2.1 Sequences viewed as functions

ایک محدود حقیقی تواتر $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ or $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ کو تفاعل $f : \{1,2,3,4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ کی طرح بھی دیکھا جاسکتا ہے۔ جس کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔ $f(k) = a_k,\ k = 1,2,3, \cdots, n.$

ایک لامحدود حقیقی تواتر $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ or $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ کو تفاعل $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ کی طرح بھی دیکھا جاسکتا ہے۔ جس کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔ $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$

اس میں علامت $\forall$ "سب کے لئے" ظاہر کرتی ہے۔ اگر کسی تواتر $\{a_k\}_1^{\infty}$ کی عام رقم a_k ہو تو ہم مکمل تواتر کو بنا سکتے ہیں۔

جیسا کہ ہم نے مشاہدہ کیا، تواتر ایک تفاعل ہے۔

برائے ذہن نشینی

یہ ضروری نہیں کہ تواتر ایک تفاعل ہو۔ مثال کے طور پر تفاعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، سے دیا گیا ہے $f(x) = 2x+1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ایک تواتر نہیں ہے، چونکہ درکار فہرست بندی ممکن نہیں ہے۔ یہ بھی غور کریں کہ f کا N یا N کا ایک تحتی مجموعہ $\{1,2, \ldots, n\}$ نہیں ہے۔

مثال 2.1

درج ذیل تواتر کے پہلی تین رقمیں لکھئے جس کی n ویں رقم اس طرح سے ہے $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

حل:

یہاں پر $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

$n = 1,$ کے لئے $c_1 = \dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$

$n = 2,$ کے لئے $c_2 = \dfrac{2(2+1)(4+1)}{6} = \dfrac{2(3)(5)}{6} = 5.$

بالآخر $n = 3,$ $c_3 = \dfrac{3(3+1)(7)}{6} = \dfrac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$

چنانچہ اس تواتر کی پہلی تین رقمیں 1، 5 اور 14 ہیں۔

مندرجہ بالا مثال میں عام رقم کے لئے ہمیں ایک ضابطہ دیا گیا تھا اور کسی بھی ایک خاص رقم کو براہ راست معلوم کر سکتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ہم تواتر کے بنانے کا ایک اور طریقہ دیکھیں گے۔

مثال 2.2

درج ذیل ہر ایک تواتر میں پہلی پانچ رقمیں لکھئے۔

(i) $a_1 = -1,\quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1$ اور $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ اور $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\quad n = 3,4, \ldots.$

حل : معطیہ

(i) $a_1 = -1$ اور $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1$

$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

چنانچہ تواتر کی درکار رقمیں ہیں $-1, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{20}, -\dfrac{1}{120}$ اور $-\dfrac{1}{840}$.

(ii) معطیہ $F_1 = F_2 = 1$ اور $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$، $n = 3, 4, 5, \ldots$ کے لئے

اب $F_1 = 1, F_2 = 1$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

چنانچہ اس تواتر کی پہلی پانچ رقمیں 1, 1, 2, 3, 5 ہیں

غور کریں

تواتر جس میں $F_1 = F_2 = 1$ اور $n = 3,4$ کے لئے $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$،
$n = 3,4, \ldots..$ کو ’’فبو نا کی تواتر‘‘ کہا جاتا ہے۔اس کی رقمیں اس طرح سے ہیں
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$ فبو نا کی (Fibonacci Sequence) قدرتی نظام
میں موجود ہے جیسا کہ سورج مکھی کے پھول میں بیجوں کی ترتیب۔سورج مکھی کے پھول کے
بیجوں کی مخالف سمت میں موجود مرغولوں کی تعداد،فبو نا کی تواتر کے متواتر اعداد ہیں۔

مشق 2.1

1۔ درج ذیل تواتر کی پہلی تین رقمیں معلوم کرو جس کی n ویں رقمیں اس طرح سے ہیں۔

(i) $a_n = \dfrac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \dfrac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2۔ درج ذیل تواتر میں ان کی nویں رقمیں دی گئی ہیں۔ ہر ایک کے لئے اس میں دی گئی رقمیں معلوم کیجئے۔

(i) $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3};\ a_7, a_9$ (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1);\ a_5, a_8$

(iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1;\ a_5, a_7.$ (iv) $a_n = (-1)^n (1 - n + n^2);\ a_5, a_8$

3۔ درج ذیل تواتر میں 18 ویں اور 25 ویں رقمیں معلوم کرو جس کو اس طرح

$$a_n = \begin{cases} n(n+3), & \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ اور n جفت ہو} \\ \dfrac{2n}{n^2+1}, & \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ اور n طاق ہو۔} \end{cases}$$

4۔ درج ذیل تواتر میں 18 ویں اور 25 ویں رقمیں معلوم کرو

$$b_n = \begin{cases} n^2, & \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ اور n جفت ہو} \\ n(n+2), & \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ اور n طاق ہو۔} \end{cases}$$

5۔ درج ذیل تواتر کی پہلی پانچ رقمیں معلوم کرو جو اس طرح سے ہے .

$a_1 = 2, a_2 = 3 + a_1$ اور $a_n = 2a_{n-1} + 5$ $n > 2$ کے لئے

6۔ درج ذیل تواتر کی پہلی چھ رقمیں معلوم کرو جو اس طرح سے ہے

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$ اور $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $n > 3$. کے لئے

2.3۔ حسابی تواتر یا حسابی سلسلے (A.P.)

اس حصے میں ہم بعض خاص قسم کے تواتر دیکھیں گے۔

تعریف

ایک تواتر $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ اس وقت **حسابی سلسلہ** کہلائے گا جب $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$ ہو جس میں d ایک مستقل ہو۔
یہاں پر a1 پہلی رقم اور d عام فرق کہلائے گی۔ حسابی تواتر کو حسابی سلسلہ بھی کہتے ہیں۔ (A.P)

مثالیں

(i) $2, 5, 8, 11, 14, \ldots\ldots$ ایک حسابی سلسلہ ہے جس میں $a_1 = 2$ اور عام فرق $d = 3$ ہے۔

(ii) $-4, -4, -4, -4, \ldots\ldots$ ایک حسابی سلسلہ ہے کیوں کہ اس میں $a_1 = -4$ اور عام فرق $d = 0$ ہے۔

(iii) $2, 1.5, 1, 0.5, -0.5, -1.01, -1.5, \ldots\ldots$ ایک .A.P ہے جس میں $a_1 = 2$ اور $d = -0.5$ ہے۔

A.P کی عام شکل

آیئے ہم .A.P کی عام شکل کو سمجھنے کی کوشش کریں۔ فرض کرو کہ حسابی سلسلہ $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ کی پہلی رقم a ہے اور d عام فرق ہے۔ یعنی. $a_1 = a$ اور $a_{n+1} = a_n + d, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

اور پردے طریقے سے n ویں رقم a_n اس طرح ہوگی

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2\,d)] + d = a + (n-1)d$$

چنانچہ ہمارے پاس ہر $n \in \mathbb{N}$ کے لئے $a_n = a + (n-1)\,d$ ہے۔

لہٰذا ایک مثالی تواتر یا .A.P اس طرح دکھائی دیتا ہے۔

$$a\,,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d\ .\ .\ .\ .\ a+(n-1)\,d,\ a+nd\ .\ .\ .$$

اور ہر ایک $n \in \mathbb{N}$ کے کسی بھی حسابی سلسلہ کی عام رقموں کی عام شکل کا ضابطہ اس طرح ہوگا۔

یعنی ہر ایک $n \in \mathbb{N}$ کے لئے $a_n = a + (n-1)\,d$

غور کریں

(i) ایک تواتر محدود بھی ہوسکتا ہے۔لہٰذا ایک AP کے صرف n رقم ہوں تو آخری رقم l اس طرح دی جاتی ہے

$$l = a + (n-1)d$$

(ii) $l = a + (n-1)d$ کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔ $n = \dfrac{l-a}{d} + 1$ اگر پہلی رقم، آخری رقم اور عام فرق دیا گیا ہو تو ہم آخری رقم معلوم کرسکتے ہیں۔

(iii) ایک حسابی سلسلے کے تین متواتر ارقام $m-d\,,\ m\,,\ m+d$ کے شکل میں ہوں گے۔

(iv) ایک حسابی سلسلے کے چار متواتر ارقام $m-3d\,,\ m-d\,, m+d,\ m+3d$ کی شکل میں ہوں گے جن کا عام فرق $2d$ ہوگا

(v) ایک حسابی سلسلہ کی ہر ایک رقم کے ساتھ کسی مستقل کو جمع یا تفریق کیا جائے تو وہ سلسلہ حسابی سلسلہ ہی رہے گا۔

(vi) ایک حسابی سلسلہ کی ہر ایک رقم کے ساتھ کسی غیر صفری مستقل کے ساتھ ضرب دیا جائے یا تفریق کیا جائے تو وہ سلسلہ حسابی سلسلہ ہی رہے گا

مثال : 2.3

ذیل کی کونسی تواتر A.P میں ہے۔ (i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$. (ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

حل : (i) فرض کرو کہ دی گئی تواتر $n \in \mathbb{N}$ ، t_n کی n ویں رقم ہو تو

$$\therefore \qquad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$$

اس لئے $\quad t_2 - t_1 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{12-10}{15} = \dfrac{2}{15}$

$$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$$

چونکہ $t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ دی گئی تواتر .A.P نہیں ہے۔

(ii) دیا گیا ہے۔ $3m-1, 3m-3, 3m-5, ...$

یہاں پر $\quad t_1 = 3m-1,\ t_2 = 3m-3,\ t_3 = 3m,-5\ \cdots.$

$$\therefore \quad t_2 - t_1 = (3m-3) - (3m-1) = -2$$

اسی طرح $\quad t_3 - t_2 = (3m-5) - (3m-3) = -2$

لہٰذا دیا گیا تواتر ایک .A.P ہے جس کی پہلی رقم $3m-1$ اور عام فرق -2 ہے۔

مثال : 2.4 حسابی سلسلے کی پہلی رقم اور عام فرق معلوم کیجئے۔

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$. (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{17}{6}$

حل :

(i) $a = 5$ پہلی رقم اور $d = 2 - 5 = -3$ عام فرق ہے۔

(ii) $a = \frac{1}{2}$ پہلی رقم اور $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$ عام فرق ہے۔

مثال : 2.5

معلوم کرو کہ حسابی سلسلہ .... , $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}$ کا ایک سب سے چھوٹا مثبت سالم عدد n اس طرح کہ tn ہو، منفی ہوگا؟

حل :

$$a = 20,\ d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$$

پہلے مثبت سالم عدد معلوم کرنا چاہئے جیسا کہ $t_n < 0$

اس کو اسی طرح حل کرنا ہے $a + (n-1)d < 0$

چھوٹا سا عدد $n \in N$ کے لئے $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$

اب $(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20 \implies (n-1) \times \frac{3}{4} > 20$

(نامساوات کو دونوں جانب -1 سے ضرب کر کے معکوس حاصل کر سکتے ہیں۔)

$$\therefore \quad n - 1 > 20 \times \frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}.$$

$n > 26\frac{2}{3} + 1$ یعنی $n > 27\frac{2}{3} = 27.66$

$n \in N$ کا چھوٹا مثبت سالم عدد $n = 28$ جو اس نامساوات کی شرط پوری کرتا ہے۔

حسابی سلسلے کا منفی عدد 28 ویں رقم ہے۔

چنانچہ اس حسابی سلسلہ کا پہلا منفی عدد 28 واں رقم ہے۔

مثال 2.6

ایک پھول کے باغ کی پہلی صف میں 23 گلاب کے پودے ہیں۔اور دوسری صف میں 21 پودے ہیں۔اور تیسری صف میں 19 پودے ہیں۔اگر آخری صف میں 5 گلاب کے پودے ہیں۔ تو معلوم کیجئے کہ پھول کے باغ میں کل کتنے صف (row) ہیں۔

حل : فرض کرو کہ پھول کے باغ میں صفوں کی تعداد n ہے۔

$1^{st}, 2^{nd}, 3^{rd} \ldots\ n^{th}$ قطاروں میں گلاب کے پھول کے پودوں کی تعداد بالترتیب $23, 21, 19, \ldots 5$ ہیں۔

یعنی

اب $t_k - t_{k-1} = -2$ جہاں $k = 2 \ldots n$

$\therefore$ لہٰذا $23, 21, 19, \ldots, 5$ ارقام حسابی سلسلے میں ہیں۔

یہاں $l = 5$ ، $d = -2$ ، $a = 23$ ہے۔

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$$

لہٰذا پھول کے باغ میں 10 قطار ہیں۔

مثال : 2.7

ایک شخص 2010ء میں سالانہ تنخواہ ₹ 30,000 پر کام میں داخل ہوتا ہے۔ اسکی تنخواہ میں ہر سال ₹ 600 کا اضافہ ہوتا ہے۔ تو معلوم کیجئے کہ کس سال اس کی سالانہ تنخواہ ₹ 39,000 ہوگی؟

حل :

فرض کرو کہ سالانہ تنخواہ ₹ 39,000 n ویں سال میں پہنچی ہے۔

اس شخص کی سالانہ تنخواہ [2010 + (n–1)] , ... , 2012 , 2011 , 2010 میں بالترتیب اس طرح ہوگی

₹ 30,000 , ₹ 30,600 , ₹ 31,200 ...... ₹ 39,000

پہلے یہ معلوم کیجئے کہ تنخواہ کا سلسلہ ایک حسابی سلسلہ ہے یا نہیں۔

رقموں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے سلسلہ کی رقم کو ایک مستقل 100 سے تقسیم کریں تو ایک نیا سلسلہ اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

300, 306, 312....390

یہاں $a = 300, d = 6, l = 390$ ہے۔

$$\text{چنانچہ} \quad n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

اس شخص کی 16 ویں سالانہ تنخواہ ₹ 39,000 ہے۔

چنانچہ 2025 میں اس شخص کی تنخواہ ₹ 39,000 ہوگی۔

مثال : 2.8

تین اعداد کی نسبت 7 : 5 : 2 ہے۔ اگر پہلا عدد، دوسرے عدد سے 7 سے تفریق کرنے کے بعد حاصل ہونے والا عدد اور تیسرا عدد ایک حسابی توانر بناتے ہوں تو اعداد معلوم کرو۔

حل :

فرض کرو کہ $2x, 5x, 7x$ غیر معلوم اعداد ہیں اس طرح سے کہ $x, (x \neq 0)$

دیئے گئے سوال کے مطابق $2x, 5x-7, 7x$ ایک A.P. میں ہیں۔

$$\therefore \quad (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7 \qquad \text{چنانچہ} \quad x = 14.$$

لہٰذا اعداد 28, 70, 98 ہیں۔

مشق 2.2

1) A.P کی پہلی رقم 6 اور عام فرق 5 ہے۔ حسابی سلسلہ اور اس کی عام رقم معلوم کیجئے۔

2) ..... 125, 120, 115, 110 حسابی سلسلے کا عام فرق اور 15 ویں رقم معلوم کیجئے۔

3) $24, 23\frac{1}{4}, 22\frac{1}{2}, 21\frac{3}{4}, \cdots$ اس حسابی سلسلہ کی کونسی رقم 3 ہے ؟

(4 ... $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$ حسابی سلسلے کی 12 ویں رقم دریافت کیجئے۔

(5 A.P ...... 4, 9, 14 کی 17 ویں رقم دریافت کیجئے۔

(6 نیچے دئے گئے حسابی سلسلے میں کتنے ارقام ہیں۔

(i) $-1, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}.$ (ii) $7, 13, 19, \cdots, 205.$

(7 اگر A.P کی نویں رقم صفر ہے۔تو ثابت کیجئے کہ 29 ویں رقم 19 ویں رقم کی دگنی ہے۔

(8 A.P کی 10 ویں اور 18 ویں رقمیں بالترتیب 41 اور 73 ہیں۔27 ویں رقم معلوم کیجئے۔

(9 نیچے دئے گئے A.P میں n معلوم کیجئے جب کہ دونوں سلسلوں کے n ویں رقم مساوی ہیں۔

$1, 7, 13, 19, \cdots$ اور $100, 95, 90, \cdots.$

(10 کتنے دو ہندسی اعداد 13 سے تقسیم پذیر ہیں؟

(11 ایک TV تیار کرنے والی کمپنی 7 ویں سال میں TV 1000 تیار کرتی ہے۔10 ویں سال میں TV 1450 تیار کرتی ہے۔TV کی تیاری میں ہر سال مستقل اور مساوی طور پر اضافہ ہوتا ہے تو معلوم کیجئے کہ پہلے سال اور 15 ویں سال میں کتنے TV تیار ہوئے ہوں گے؟

(12 ایک آدمی پہلے ماہ کے دوران 640 ₹ بچاتا ہے۔دوسرے ماہ 720 ₹، تیسرے ماہ 800 ₹۔ اسی طرح اگر بچت متواتر جاری رہے تو 25 ویں ماہ میں اس کی بچت کیا ہوگی ؟

(13 ایک حسابی سلسلے کے تین متواتر عددوں کا حاصل جمع 6 اور حاصل ضرب 120 – ہے تو تین اعداد دریافت کیجئے۔

(14 ایک حسابی سلسلے کی تین متواتر عددوں کا حاصل جمع 18 اور ان کے مربعوں کا حاصل جمع 140 ہو تو اعداد دریافت کیجئے۔

(15 ایک A.P. کی m ویں رقم کا m گُنا، n ویں رقم کا n گُنا کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کی $(m+n)$ ویں رقم صفر ہے۔

(16 ایک شخص 25,000 ₹ جمع کر کے سالانہ 14% شرح سود حاصل کرتا ہے۔کیا یہ رقمیں (سود + اصل) ایک حسابی تواتر بناتی ہیں؟ اگر ہاں تو 20 سال کے بعد کتنی رقم جمع ہو گی؟

(17 اگر a, b, c حسابی سلسلے کے ارقام ہیں تو ثابت کیجئے کہ $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$

(18 اگر a, b, c ایک A.P ہے تو ثابت کیجئے $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ بھی ایک A.P. میں ہیں۔

(19 اگر a^2, b^2, c^2 ایک A.P ہے تو ثابت کیجئے $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ بھی ایک A.P. میں ہیں۔

(20 اگر $a^x = b^y = c^z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ اور $b^2 = ac$ ہو تو بتائیے کہ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ایک حسابی سلسلہ میں ہیں۔

2.4 ہندسی سیکوئنس یا ہندسی سلسلہ (Goemetric Progression) (G.P.)

تعریف

سیکوئنس .... ,$a_1, a_2, a_3, ...a_n$ کو ہندسی سیکوئنس کہتے ہیں۔ $n \in N$, $a_{n+1} = a_n\ r$ یہاں r غیرصفری مستقل عدد ہے۔ a_1 پہلی رقم اور r مشترک نسبت ہے۔ہندسی سیکوئنس کو ہندسی سلسلہ بھی کہتے ہیں۔

ہندسی سلسلوں کی بعض مثالوں پر غور کریں۔

(i) 3, 6, 12, 24

یہ سیکوئنس $\{a_n\}_1^{\infty}$ ہندسی سیکوئنس ہے۔ اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2 \neq 0$ یہ سیکوئنس ہندسی سیکوئنس ہے۔

(ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \cdots$

یہاں پر ہمارے پاس ہے $\frac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \frac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3} \neq 0.$

غرض دیا گیا سلسلہ ایک ہندسی سلسلہ ہے۔

ایک ہندسی سلسلہ کی عام شکل :

عام ہندسی سلسلہ میں a پہلی رقم اور r مشترک نسبت ہے۔تو ہندسی سیکوئنس $\{a_n\}_{k=1}^{\infty}$ ہے۔اب ہمارے پاس

$a_1 = a$ اور $\frac{n+1}{a_n} = r$, $n \in \mathbb{N}$ کے لئے

لہٰذا $n \in \mathbb{N}$ کے لئے $a_{n+1} = r\,a_n$

$n = 1, 2, 3,$ کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

درج ذیل نمونے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}.$$

لہٰذا ہر $n \in N$ کے لئے ایک ہندسی سلسلہ کی n ویں رقم $a_n = ar^{n-1}$ ہوگی۔

لہٰذا ایک عام (مثالی) ہندسی سلسلہ $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}, ar^n, ...,$ کی صورت میں ہوگا۔

ہندسی سلسلہ کا عام ضابطہ $t_n = ar^{n-1}$ ہے جس میں $n = 1, 2, 3, ...,$ ہے۔

فرض کیجئے کہ ایک سلسلے کے پہلے کے چند ارقام دیئے گئے ہوں تو ہم یہ کیسے معلوم کر سکتے ہیں دیا گیا سلسلہ ہندسی سلسلہ ہے یا نہیں؟

اگر $\frac{t_{n+1}}{t_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$ جس میں r ایک غیر صفری مستقل ہے تو $\{t_n\}_1^\infty$ یہ G.P. میں ہوگا۔

غور کریں

(i) اگر کسی سلسلے میں پہلی رقم کے علاوہ کسی بھی رقم اور اس کی پچھلی رقم کی نسبت غیر صفری مستقل ہو تو وہ سلسلہ ایک ہندسی سلسلہ ہوگا۔

(ii) ایک ہندسی سلسلہ کی ہر ایک رقم کو کسی غیر صفری مستقل کے ساتھ ضرب دیا جائے یا تقسیم کیا جائے تو وہ سلسلہ ہندسی سلسلہ ہی رہے گا

(iii) ہندسی سلسلے میں تین متواتر ارقام اس طرح سے لئے جائیں گے یعنی $\frac{a}{r}, a, ar$ جس کا مشترک فرق r ہے۔

(iv) ایک ہندسی سلسلہ کے چار متواتر اعداد $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ اس طرح سے لئے جائیں گے۔
(یہاں پر مشترک نسبت r^2 ہے، نہ کہ r جیسا کہ اوپر دیا گیا ہے)

مثال : 2.9

نیچے دیئے گئے سیکوئنس میں کونسا ہندسی سیکوئنس ہے۔

(i) $5, 10, 15, 20, \cdots$. (ii) $0.15, 0.015, 0.0015, \cdots$. (iii) $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, 3\sqrt{21}, \cdots$.

حل :

(i) متواتر نسبتوں کو فرض کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$.
اسمیں مشترک نسبت نہیں ہے اسی لئے یہ ہندسی سیکوئنس نہیں ہے۔

(ii) ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$.
چونکہ یہاں مشترک نسبت $\frac{1}{10}$ ہے، اس لئے یہ ہندسی سیکوئنس ہے۔

(iii) یہاں پر $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$ ، لہٰذا مشترک نسبت $\sqrt{3}$ ہے۔
لہٰذا دی گئی سیکوئنس ہندسی ہندسی سیکوئنس ہے۔

مثال : 2.10

درج ذیل ہندسی سیکوئنس کی مشترک نسبت اور عام رقم معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$. (ii) $0.02, 0.006, 0.0018, \cdots$.

حل :

(i) دی گئی سیکوئنس ہندسی سیکوئنس ہے۔ مشترک نسبت اس طرح دی گئی ہے۔

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots.$$

لہٰذا $r = \dfrac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$.

سیکوئنس کی پہلی رقم $\frac{2}{5}$ ہے۔ لہٰذا سیکوئنس کی عام رقم اس طرح سے ہے۔

$$t_n = ar^{n-1}, \; n = 1,2,3, \cdots$$

$$\Longrightarrow \qquad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1,2,3, \cdots$$

(ii) ہندسی سیکوئنس کی مشترک نسبت اس طرح سے ہے۔

$$r = \frac{0.006}{0.02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$

ہندسی سیکوئنس کی پہلی رقم 0.02 ہے۔ لہٰذا سیکوئنس کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1,2,3, \cdots$$

مثال : 2.11

کسی ہندسی سلسلے کی 4 ویں رقم $\frac{2}{3}$ ہے اور 7 ویں رقم $\frac{16}{81}$ ہے تو ہندسی سلسلہ معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے کہ $t_4 = \frac{2}{3}$ اور $t_7 = \frac{16}{81}$.

ضابطے کو استعمال کرتے ہوئے $t_n = ar^{n-1}, \; n = 1,2,3, \cdots$ کی عام رقم کے لئے ہمارے پاس ہے۔

$$t_4 = ar^3 = \frac{2}{3} \quad \text{اور} \quad t_7 = ar^6 = \frac{16}{81}.$$

غور کیجئے کہ ہندسی سیکوئنس معلوم کرنے کے لئے ہمیں a اور r معلوم کرنا ہے۔

t_7 کو t_4 سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

لہٰذا $r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $r = \frac{2}{3}$.

اب $t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right).$

$$\Longrightarrow \qquad a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}. \qquad \therefore \quad a = \frac{9}{4}.$$

لہٰذا مطلوبہ ہندسی سلسلہ اس طرح ہے $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, ar^n, \ldots,$

یعنی $\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right), \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2, \ldots.$

مثال 2.12

بیکٹیریا کے تکثر (Culture) کے دوران ایک گھنٹہ میں بیکٹیریا کی تعداد دُگنی ہوجاتی ہے۔ ابتداء میں بیکٹیریا کی تعداد 30 تھی تو 14 ویں گھنٹے کے آخر میں بیکٹیریا کی تعداد کتنی ہوگی؟

حل : غور کریں کہ بیکٹیریا کی تعداد ہر گھنٹے کے آخر میں دوہری ہوجاتی ہے۔

حل :

$$30 = \text{ابتداء میں بیکٹیریا کی تعداد}$$

$$2(30) = \text{ایک گھنٹے کے آخر میں بیکٹیریا کی تعداد}$$

$$2\,(2)\,(30) = 30\,(2)^2 = \text{بیکٹیریا کی تعداد دوسرے گھنٹے کے آخر میں}$$

اس طرح بیکٹیریا کی مشترک نسبت 2 ہے۔

غرض n گھنٹے مسلسل بڑھنے کے بعد ہر گھنٹہ بیکٹیریا کی تعداد $r = 2$ یعنی مشترک نسبت ہوگی۔

اگر t_n بیکٹیریا کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔تو n گھنٹوں بعد

ہندسی سلسلے کی ایک عام رقم ہوگی $t_n = 30\,(2^n)$

$$t_{14} = 30\,(2^{14}) = \text{بیکٹیریا کی تعداد کی 14 ویں رقم}$$

مثال 2.13 :

500 روپئے بینک میں جمع کرنے پر سالانہ 10% شرح سود مرکب محسوب ہوگا ہے۔ 10 ویں سال کے آخر میں اس کی جمع کردہ رقم کتنی ہوگی؟

حل : اصل زر 500 روپئے ہے،لہٰذا پہلے سال میں اس زر اصل کے لئے سود $500\left(\frac{10}{100}\right) = 50.$

لہٰذا دوسرے سال کا زر اصل = پہلے سال کا زر اصل + سود

$$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

اب دوسرے سال کا سود $= \left(500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right).$

لہٰذا تیسرے سال کا زر اصل $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

اسی طرح جاری رہنے پر n ویں سال کا زر اصل $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}.$

n ویں سال کا زر اصل = (n–1) ویں سال کے آخر میں رقم

لہٰذا 10ویں سال کے آخر میں رقم $= ₹\, 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{10} = ₹\, 500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}.$

برائے ذہن نشینی

اوپر کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے سود مرکب محسوب کرنے کے لئے ضابطہ بنا سکتے ہیں۔

$$A = (P + i)^n$$

جس میں A رقم، P زر اصل، i سود اور n سالوں کی تعداد ہوگی۔

$$i = \frac{r}{100}$$

مثال : 2.14

ایک ہندسی سلسلے کے پہلے تین ارقام کا حاصل جمع $\frac{13}{12}$ اور ان کا حاصل ضرب -1 ہے مشترک نسبت اور رقم معلوم کیجئے۔

حل : ہم فرض کریں کہ ایک ہندسی سلسلے کے پہلے تین ارقام $\frac{a}{r}, a, ar$ اس طرح ہیں۔

حاصل جمع $= \frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$

اسی طرح $a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \implies a\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12}$ (1)

حاصل ضرب $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$

$\implies a^3 = -1 \quad \therefore \quad a = -1$

$a = -1$ کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$(-1)\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\implies 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r+4)(4r+3) = 0$$

لہٰذا $r = -\frac{4}{3}$ یا $-\frac{3}{4}$

جب $r = -\frac{4}{3}$ اور $a = -1$ ہو تو رقمیں اس طرح ہوں گی۔ $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}.$

جب $r = -\frac{3}{4}$ اور $a = -1$ ہو تو ہم اس طرح حاصل کرتے ہیں، جو الٹی ترتیب میں ہیں $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ -

مثال : 2.15

اگر a, b, c, d ایک G.P ہو تو ثابت کیجئے کہ $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$

حل : a, b, c, d ایک G.P ہے جس میں a پہلی رقم اور r مشترک نسبت ہے۔

لہٰذا $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

یہاں پر $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$

$$= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2$$

$$= a^2[(r-r^2)^2 + (r^2-1)^2 + (r^3-r)^2]$$

$$= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2]$$

$$= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3 - 1]^2$$

$$= (ar^3 - a)^2 = (a - ar^3)^2 = (a-d)^2$$

مشق 2.3

1) معلوم کیجئے کہ مندرجۂ ذیل میں کونسا ہندسی سیکوئنس ہے۔اگر وہ ہندسی سیکوئنس میں ہوں تو ان کی مشترک نسبت معلوم کرو۔

(i) $0.12,\ 0.24,\ 0.48, \cdots$ (ii) $0.004,\ 0.02,\ 0.1, \cdots$ (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots$

(iv) $12,\ 1,\ \frac{1}{12}, \cdots$ (v) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \cdots$ (vi) $4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \cdots$

2) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, \cdots$ ہندسی سلسلے کی 10 ویں رقم اور مشترک نسبت معلوم کیجئے۔

3) ایک ہندسی سلسلے کی 4 ویں اور 7 ویں رقمیں بالترتیب 54 اور 1458 ہیں۔ G.P معلوم کیجئے۔

4) ایک ہندسی سلسلے کی پہلی رقم $\frac{1}{3}$ اور 6 ویں رقم $\frac{1}{729}$ ہے۔G.P دریافت کیجئے۔

5) ذیل کے کونسے ارقام ہندسی سلسلے میں ہیں :

(i) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \cdots$ میں $\frac{128}{15625}$ (ii) $1, 2, 4, 8, \cdots$ میں 1024

6) G.P $162, 54, 18......$ اور $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \cdots$ کی n ویں رقم مساوی ہوں تو n کی قیمت دریافت کیجئے۔

7) G.P کی پہلی رقم 3 اور 5 ویں رقم 1875 ہو تو مشترک نسبت معلوم کیجئے۔

8) ہندسی سلسلے کے تین اعداد کا حاصل جمع $\frac{39}{10}$ اور حاصل ضرب 1 ہے۔مشترک نسبت اور رقمیں معلوم کیجئے۔

9) ایک G.P میں تین متواتر اعداد کا حاصل ضرب 216 ہے۔ان عددوں کے جوڑیوں کے حاصل ضرب کا حاصل جمع 156 ہے اعداد معلوم کیجئے۔

10) ایک G.P کے تین متواتر اعداد معلوم کیجئے جن کا حاصل جمع 7 اور انکے مقلوب کا حاصل جمع $\frac{7}{4}$ ہے۔

11) ایک ہندسی سلسلے کے پہلے تین اعداد کا حاصل جمع 13 ہے۔اور ان کے مربعوں کا حاصل جمع 91 ہے۔ G.P معلوم کیجئے۔

12) ₹1000 بنک میں جمع کرنے پر سالانہ سود مرکب 5% حاصل ہوتا ہے۔معلوم کیجئے کہ 12 سال کے اختتام کتنی رقم ملے گی؟

13) ایک کمپنی نقل کرنے کی مشین (Copier) ₹ 50,000 میں خریدتی ہے۔مشین کی قیمت میں سالانہ 45 % کی کمی ہوتی ہے۔معلوم کیجئے کہ 15 سال کے بعد مشین کی قیمت کیا ہوگی ؟

14) اگر a, b, c, d ایک G.P ہے تو ثابت کیجئے۔ $(a-b+c)(b+c+d) = ab+bc+cd.$

15) اگر a, b, c, d ایک G.P میں ہوں تو ثابت کیجئے کہ $a+b,\ b+c,\ c+d,$ بھی ایک G.P میں ہیں۔

2.5 سلسلے :(Series)

نیچے دئے گئے مسئلہ پر غور کیجئے۔

ایک آدمی یکم جنوری 1990 کو 25,000 ₹ سالانہ تنخواہ پر کام میں داخل ہوتا ہے۔ ہر سال اس کی تنخواہ میں 500 ₹ کا اضافہ ہوتا ہے۔ معلوم کیجئے کہ یکم جنوری 2010 تک اُس شخص نے کتنی تنخواہ حاصل کی ہوگی ؟

پہلے یہ غور کیجئے کہ اس کی سالانہ تنخواہ حسابی تواتر بنتی ہے۔

$$25000, 25500, 26000, 26500 \ldots\ldots (25000 + 19(500))$$

20 سال کی تنخواہ جمع کرنے پر $= 25000 + 25500 + 26000 + 26500 \ldots\ldots (25000 + 19(500))$

چنانچہ تواتر کے حاصل جمع کا تصور اسی طرح سے ہوا ہے۔

تعریف

کسی تواتر کے رقموں کو جمع کرنے کے لئے بنائی گئی عبارت **سلسلہ** کہلاتی ہے۔

اگر کسی سلسلہ میں محدود تعداد کے ارقام ہوں تو وہ **محدود سلسلہ** کہلاتے ہیں۔

اگر کسی سلسلہ میں لامحدود تعداد کے تواتر ہوں تو وہ **غیر محدود سلسلہ** کہلائے گا۔

حقیقی اعداد کے ایک تواتر کو فرض کریں $S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ہر ایک $n \in N$ کے لئے ہم جزوی حاصل جمع کو ظاہر کرتے ہیں اس طرح کہ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n$ جس میں $n = 1,2,3, \ldots$, ہوں تو $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ **جزوی حاصل جمع** کا تواتر ہوگا۔

جہاں دیا ہوا تواتر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ہے۔

جوڑی دار ترتیب $(\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$، تواتر $\{a_n\}_1^{\infty}$ کا **لامحدود سلسلہ** کہلاتی ہے۔ لامحدود سلسلہ کو $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یا صرف $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ لکھ دیتے ہیں۔ نشان $\sum$ کو **سِگما** کہتے ہیں۔ جو جمع کی نمائندگی کرتا ہے۔

ہم آسانی کے ساتھ محدود سلسلوں (محدود رقموں کی جمع) کے بارے میں سمجھ سکتے ہیں۔ مگر عام جمع کے طریقے سے محدود سلسلوں کی جمع ناممکن ہے۔ ہم ہم لامحدود سلسلوں کی جمع کس طرح کریں گے (یا معنی پیش کریں گے)؟ اس کے بارے میں ہم بڑی جماعتوں میں معلومات حاصل کریں گے۔ ہم اب صرف محدود سلسلوں کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

اس باب میں، ہم **حسابی سلسلے** اور **ہندسی سلسلے** کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

2.5.1 حسابی سلسلہ :(Arithmetic Series)

ایک حسابی سلسلہ وہی سلسلہ ہوگا جس کے ارقام ایک حسابی تواتر (سیکوئنس) بناتے ہوں۔

حسابی سلسلے کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع

فرض کیجئے کہ ایک حسابی سلسلے میں پہلی رقم 'a' اور عام فرق 'd' ہو تو سلسلہ اس طرح ہوگا۔

$$a, a + d, a + 2d \ldots\ldots a + (n - 1)\, d \ \ldots\ldots$$

S_n حسابی سلسلے کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع ہوگا۔

لہٰذا $S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots\ (a + (n-1)\ d)$

$\Longrightarrow\ S_n = na + (\ d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d\ )$

$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\ )$

غرض اگر ہم $1 + 2 + 3 \ldots\ldots + (n-1)$ کا حاصل جمع معلوم کر لیں گے تو اس ضابطہ کو آسان کر سکتے ہیں۔

صرف حسابی سلسلہ $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ کا حاصل جمع ہے۔

لہٰذا پہلے ہم $1 + 2 + 3 \ldots\ldots + (n-1)$ کا حاصل جمع نیچے معلوم کریں۔

اس کے بعد پہلے n مثبت سالم اعداد کا حاصل جمع معلوم کریں گے۔

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \qquad (1)$$

اب ہم اوپر کا حاصل جمع کرنے کے لئے ایک چھوٹی چال چلیں گے۔ غور کریں کہ ہم Sn کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1. \qquad (2)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1). \qquad (3)$$

اب (3) کے دائیں جانب کتنے $(n+1)$ ہیں؟

(1) اور (2) ہر ایک میں n مرتبہ ہیں۔ (1) اور (2) سے ہم صرف ان رقموں کو جمع کریں گے۔

لہٰذا $(n+1)$، ٹھیک n مرتبہ ہوں گے۔

لہٰذا (3) مختصر ہو کر $2S_n = n(n+1)$ بن جاتا ہے۔ چنانچہ پہلے n مثبت سالم اعداد کا حاصل جمع اس طرح ہوگا

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \text{لہٰذا}\quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (4)$$

یہ حاصل جمع معلوم کرنے کا ایک اہم ضابطہ ہے۔

برائے ذہن نشینی


کارل فریڈرک گاس
(1777 – 1855)

اوپر بتائے طریقہ کو سب سے پہلے جرمنی کے ایک مشہور ریاضی دان **کارل فریڈرک گاس** نے استعمال کیا تھا۔ ان کو **علم ریاضی کا شہزادہ** بھی کہا جاتا ہے۔ جب وہ پانچویں جماعت میں تھے تو ان کے استاد نے ان کو پہلے 100 مثبت سالم اعداد کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے کہا تھا۔ جب آپ بڑی کلاسوں کو جائیں گے تو ضابطہ کس طرح بنائے جاتے ہیں، اس کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

اب ہم حسابی تواتر کے n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنے کا عام طریقہ پر غور کریں گے۔

پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ

$$S_n = na + [d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d]$$

$$= na + d[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$$

$$= na + d\frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{(4) استعمال کر کے}$$

$$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad (5)$$

چنانچہ ہمارے پاس ہے

$$S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2}\ (\text{پہلی رقم}+\text{آخری رقم})$$
$$= \frac{n}{2}(a + l).$$

ایک حسابی سلسلے میں پہلی رقم a ہو تو پہلے n رقموں کا حاصل جمع Sn اس طرح دیا گیا ہے۔
اگر عام فرق d دیا گیا ہو تو (i) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
اگر آخری رقم l دی گئی ہو تو (ii) $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

مثال 2.16

حسابی سلسلے کا حاصل جمع معلوم کرو۔ $5 + 11 + 17 + ... + 95$

حل : دیا گیا سلسلہ $5 + 11 + 17 + ... + 95$ ایک حسابی سلسلہ ہے۔

غور کیجئے کہ $a = 5, \quad d = 11 - 5 = 6, \quad l = 95.$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

اب $= \frac{95-5}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16.$

$$S_n = \frac{n}{2}[l + a]$$

چنانچہ مطلوبہ حاصل جمع $S_{16} = \frac{16}{2}[95 + 5] = 8(100) = 800.$

مثال 2.17

درج ذیل سلسلہ میں پہلی 2n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ...$$

حل : ہمیں معلوم کرنا ہے $= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ $2n$ رقموں تک

$= 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \cdots$ $2n$ رقموں تک

$= (1-4) + (9-16) + (25-36) + \cdots$ (گروہ بندی سے) n رقموں تک

$= -3 + (-7) + (-11) + \cdots n$ رقموں تک

درج بالا سلسلہ ایک حسابی سلسلہ ہے جس کی پہلی رقم a= –3 ؛ عام فرق d = –4 ہے۔

چنانچہ مطلوبہ حاصل جمع $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)(-4)]$$
$$= \frac{n}{2}[-6 - 4n + 4] = \frac{n}{2}[-4n - 2]$$
$$= \frac{-2n}{2}(2n + 1) = -n(2n + 1)$$

مثال 2.18 ایک حسابی سلسلہ میں پہلے 14 رقموں کا حاصلِ جمع 203– اور اس کے بعد کی 11 رقموں کا حاصل جمع 572– ہے۔ حسابی سلسلہ معلوم کرو۔

حل : معطیہ

$$S_{14} = -203$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{14}{2}[2a+13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 7[2a+13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 2a+13d = -29. \qquad (1)$$

یہ بھی دیا گیا ہے کہ اس کے بعد کی 11 رقموں کا حاصل جمع = 572–

اب $\quad S_{25} = S_{14} + (-572)$

یعنی $\quad S_{25} = -203-572 = -775.$

$$\Longrightarrow \quad \frac{25}{2}[2a+24d] = -775$$

$$\Longrightarrow \quad 2a+24d = -31\times 2$$

$$\Longrightarrow \quad a+12d = -31 \qquad (2)$$

(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $a = 5$ اور $d = -3.$

$$5+(5-3)+(5+2(-3))+\cdots .$$

لہٰذا مطلوبہ حسابی سلسلہ یہ ہے $\quad 5+2-1-4-7-\cdots .$

مثال 2.19

حسابی سلسلہ $24+21+18+15+\ldots.$ کی کتنی رقمیں مسلسل لینے پر ان کا حاصل جمع 351– ہوگا؟

حل :

دیئے گئے حسابی سلسلہ میں $\quad a = 24, \quad d = -3.$

اب ہم n معلوم کریں گے اس طرح کہ $\quad S_n = -351.$

اب $\quad S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = -351$

یعنی $\quad \frac{n}{2}[2(24)+(n-1)(-3)] = -351$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[48-3n+3] = -351$$

$$\Longrightarrow \quad n(51-3n) = -702$$

$$\Longrightarrow \quad n^2-17n-234 = 0$$

$$(n-26)(n+9) = 0$$

$$\therefore \quad n = 26 \quad \text{or} \quad n = -9$$

چونکہ n یہاں پر رقموں کی تعداد ہے، وہ منفی نہیں ہوسکتا۔

چنانچہ حاصلِ جمع 351– حاصل کرنے کے لئے 26 رقمیں درکار ہیں۔

مثال 2.20 8 سے تقسیم ہونے والے تمام 3 ہندسی طبعی اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

حل : 8 سے تقسیم ہونے والے تین ہندسی فطری اعداد 104, 112,120, ... 992 ہیں۔
فرض کرو کہ ان کا حاصل جمع Sn ہے۔یعنی $S_n = 104 + 112 + 120 + 128 + \ldots 992$
اب 104 , 112 , 120 , ... 992 ایک حسابی سلسلہ ہے۔
یہاں پر $a = 104$ ؛ $d = 8$ اور $l = 992$ ہے۔

$$\therefore \qquad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992 - 104}{8} + 1$$

$$= \frac{888}{8} + 1 = 112.$$

$$S_{112} = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{112}{2}[104 + 992] = 56(1096) = 61376.$$

چنانچہ 8 سے تقسیم ہونے والے تمام 3 ہندسی طبعی اعداد کا حاصل جمع 61376 ہے۔

مثال 2.21

ایک منظم کثیر ضلعی کے اندرونی زاویوں کی پیائش اس طرح لی گئی ہے کہ اس سے ایک حسابی سلسلہ بنتا ہے۔سلسلہ کے زاویہ کی کم ترین پیائش $85°$ اور سب سے بڑے زاویہ کی پیائش $215°$ ہے۔دئے گئے کثیر ضلعی میں ضلعوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل : فرض کریں کہ n کثیر ضلعی کے ضلعوں کی تعداد ہے۔
چونکہ ان کی پیائشیں ایک حسابی سلسلہ بناتی ہیں،اس کثیر ضلعی کے اندرونی زاویوں کا حاصل جمع اس طرح سے ہے۔

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + l \text{, where } a = 85 \text{ and } l = 215.$$

$$S_n = \frac{n}{2}[l + a] \qquad (1)$$

ہم جانتے ہیں کہ ایک کثیر ضلعی کے اندرونی زاویوں کا حاصل جمع
فرض کریں کہ Sn ، n ضلعوں والے اندرونی زاویوں کا حاصل جمع ہے۔ $(n - 2)\times 180^0$

یعنی $$S_n = (n - 2)\times 180$$

(1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $$\frac{n}{2}[l + a] = (n - 2)\times 180$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{n}{2}[215 + 85] = (n - 2)\times 180$$

$$150n = 180(n - 2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12..$$

لہٰذا کثیر ضلعی کے ضلعوں کی تعداد 12 ہے۔

مشق 2.4

1۔ حاصل جمع معلوم کیجئے (i) پہلے 75 مثبت سالم اعداد کا (ii) پہلے 125 طبعی اعداد کا
2۔ ایک حسابی سلسلے کے پہلی 30 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے جب اس کی n ویں رقم $3 + 2n$ ہو۔
3۔ حسابی سلسلے کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2.$ (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 رقموں تک

4۔ دیئے گئے حسابی سلسلے میں Sn معلوم کرو۔

(i) $a = 5, \quad n = 30, \quad l = 121$ (ii) $a = 50, \quad n = 25, \quad d = -4$

5۔ . $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ...$ سلسلہ کے 40 ابتدائی رقموں کو جمع کیجئے۔

6۔ حسابی سلسلے میں پہلی 11 رقموں کا حاصل جمع 44 ہے اور اس کے بعد کی 11 رقموں کا حاصل جمع 55 ہے۔حسابی سلسلہ معلوم کرو۔

7۔ایک حسابی سلسلہ .... ,60, 56, 52, 48 میں حاصل جمع 368 حاصل کرنے کے لئے پہلی رقم سے شروع کر کے کتنی رقمیں درکار ہیں؟

8۔ 9 سے تقسیم ہونے والے تمام 3 ہندسی طبعی اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

9۔ ایک حسابی سلسلے کی پہلی 20 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے جس کی تیسری رقم 7 ہے اور ساتویں رقم، تیسری رقم کے 3 گُنا سے سے 2 زیادہ ہے۔

10۔ 300 اور 500 کے درمیان 11 سے تقسیم پذیر تمام اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

11۔ حل کیجئے : $1 + 6 + 11 + 16 + ... + x = 148$

12۔ 100 اور 200 کے درمیان 5 سے غیر تقسیم پذیر تمام اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

13۔ ایک تعمیراتی کمپنی کو ایک پل کی تعمیر میں تاخیر کی وجہ سے ہر روز جرمانہ ڈالا جا رہا ہے۔ جرمانہ پہلے دن 4000 روپے ہوگا، جو روزانہ 1000 روپے کے حساب سے بڑھتا جائے گا۔ اپنے بجٹ کو مدنظر رکھتے ہوئے کمپنی زیادہ سے زیادہ 1,65,000 روپے بطورِ جرمانہ ادا کر سکتی ہے۔ یہ معلوم کرو کہ کام کی تکمیل میں زیادہ سے زیادہ کتنے دن کی تاخیر ہو سکتی ہے؟

14۔ 8% سادہ سود پر 1000 روپے ہر سال ودیعت کئے جا رہے ہیں۔ ہر سال کے اختتام پر سود محسوب کیجئے۔ کیا یہ سود کی رقم ایک حسابی سلسلہ بناتی ہے؟ اگر ایسا ہے تو 30 سال کے آخر میں جملہ سود کتنا ملے گا معلوم کیجئے۔

15۔ ایک سلسلہ میں پہلے n رقموں کا مجموعہ $3n^2-2n$ ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ایک حسابی سلسلہ ہے۔

16۔ اگر ایک گھڑی ایک بجے 1 بار گھنٹی بجاتی ہے، دو بجے دو بار گھنٹی بجاتی ہے اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری ہے۔ یہ ایک دن میں کتنی گھنٹیاں بجائے گی؟

17۔ کسی حسابی سلسلہ کی پہلی رقم a ، دوسری رقم b اور آخری رقم c ہو تو بتائیے کہ اس کا حاصل جمع. $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ہے۔

18۔ کسی حسابی سلسلے میں اگر (2n+1) رقمیں ہوں تو ثابت کرو کہ طاق اعداد کے حاصل جمع اور جفت اعداد کے حاصل جمع کی نسبت n : (n+1) ہے۔

19۔ ایک حسابی سلسلے میں پہلی m رقموں اور پہلی n رقموں کے حاصل جمع کی نسبت $m^2 : n^2$ ہے۔بتائیے کہ m ویں اور n ویں رقموں کی نسبت $(2m-1):(2n-1)$ ہے۔

20۔ ایک مالی اپنے باغ میں ایک منحرفی شکل بنانا چاہتا ہے۔ منحرف شکل کی لمبائی والا حصہ بنانے کے لئے پہلے صف میں 97 اینٹوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ ہر صف میں 2 اینٹیں کم ہوتی جاتی ہیں اور 25 ویں صف میں تعمیری کام مکمل ہو جاتا ہے۔ اس شکل کو بنانے کے لئے اس کو کتنی اینٹیں خرید نا ہوگا؟

2.5.2۔ ہندسی سلسلہ (Geometric Series)

ایک سلسلہ اس وقت **ہندسی سلسلہ** کہلائے گا جب اس میں موجود رقمیں ایک ہندسی سلسلہ بناتی ہیں۔

فرض کیجئے کہ $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ایک ہندسی سلسلہ ہے جس میں $r \neq 0$ مشترک نسبت ہے۔

فرض کریں کہ $\quad S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (1)$

اگر $r = 1$ ہو تو (1) اس طرح ہوگا $S_n = na.$

(1) کو استعمال کرکے $r \neq 1$ کے لئے سلسلہ اس طرح سے ہے۔

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \qquad (2)$$

اب (2) کو (1) سے تفریق کرنے پر

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$\Longrightarrow \quad S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

چنانچہ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ چونکہ $r \neq 1.$

ایک ہندسی سلسلہ میں پہلے n عددوں کا حاصل جمع اس طرح دیا گیا ہے۔

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, & \text{اگر } r \neq 1 \\ na & \text{اگر } r = 1. \end{cases}$$

جس میں a پہلی رقم ہے اور r مشترک نسبت ہے۔

برائے ذہن نشینی

درحقیقت $-1 < r < 1$ ہو تو، درج ضابطہ بہتر ثابت ہوگا۔ $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \dfrac{a}{1-r}$.

غور کیجئے کہ مثبت محدود اعداد کا حاصل جمع ایک محدود قیمت دے گا۔

مثال 2.22

ہندسی سلسلہ. $16 - 48 + 144 - 432 \quad \cdots$ کی پہلی 25 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

یہاں پر $a = 16, \; r = -\dfrac{48}{16} = -3 \neq 1$ استعمال کرنے پر $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, \; r \neq 1.$

ہمیں حاصل ہوا $S_{25} = \dfrac{16(1-(-3)^{25})}{1-(-3)} = \dfrac{16(1+3^{25})}{4} = 4(1+3^{25})$.

مثال 2.23

درج ذیل ہندسی سلسلوں کے لئے S_n معلوم کیجئے۔

(i) $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$ (ii) $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

حل :

(i) معطیہ $a = 2,\quad t_6 = 486,\quad n = 6$

اب $t_6 = 2(r)^5 = 486$

$\Longrightarrow \quad r^5 = 243 \quad \therefore \quad r = 3.$

اب $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ if $r \neq 1$

لہٰذا $S_6 = \dfrac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728.$

(ii) معطیہ $a = 2400,\quad r = -3,\quad n = 5$

لہٰذا $S_5 = \dfrac{a(r^5 - 1)}{r - 1}$ if $r \neq 1$

$$\frac{2400[(-3)^5 - 1]}{-\ (-3)\quad 1}$$

لہٰذا $S_5 = \dfrac{2400}{4}(1 + 3^5) = 600(1 + 243) = 146400$

مثال 2.24

ہندسی سلسلہ $2 + 4 + 8 + \ldots$ میں حاصل جمع 1022 کے لئے پہلی رقم سے اور کتنے متواتر رقموں کی ضرورت ہے؟

حل : دیا گیا ہندسی سلسلہ $2 + 4 + 8 + \ldots$ ہے

معطیہ

$a = 2,\quad r = 2,\quad S_n = 1022.$

n معلوم کرنے کے لئے فرض کریں کہ

$$S_n = \frac{a[r^n - 1]}{r - 1} \text{ if } r \neq 1$$

$$= (2)\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right] = 2(2^n - 1)$$

مگر $S_n = 1022$ لہٰذا $2(2^n - 1) = 1022$

$\Longrightarrow \quad 2^n - 1 = 511$

$\Longrightarrow \quad 2^n = 512 = 2^9.$ لہٰذا $n = 9.$

مثال 2.25

ایک ہندسی سلسلہ کی پہلی رقم 375 اور چوتھی رقم 192 ہے۔ اس کی مشترک نسبت اور پہلی 14 رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

حل : فرض کریں کہ a پہلی رقم ہے اور r مشترک نسبت ہے۔

معطیہ $a = 375,\quad t_4 = 192.$

اب $t_n = ar^{n-1}$

$\therefore\quad t_4 = 375r^3$

$\Longrightarrow\quad 375r^3 = 192$

$$r^3 = \frac{192}{375} \quad\Longrightarrow\quad r^3 = \frac{64}{125}$$

$$r^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{4}{5}$$ درکار مشترک نسبت ہے۔

اب $S_n = a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right]$ if $r \neq 1$

لہٰذا $$S_{14} = \frac{375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14}-1\right]}{\frac{4}{5}-1} = (-1)\times 5\times 375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14}-1\right]$$

$$= (375)(5)\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right] = 1875\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right].$$

غور کریں

$S_n = a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right]$ if $r \neq 1.$ اس کے بجائے $S_n = a\left[\frac{1-r^n}{1-r}\right]$ if $r \neq 1$ اوپر کی مثال میں ہم استعمال کریں گے

مثال 2.26 ایک ہندسی سلسلہ میں 4 رقمیں ہیں جس کی مشترک نسبت مثبت ہے۔ پہلی دو رقموں کا حاصل جمع 8 اور آخری دو رقموں کا حاصل جمع 72 ہے۔ سلسلہ معلوم کرو۔

حل : فرض کریں کہ ہندسی سلسلہ میں پہلی چار رقموں کا حاصل جمع $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ اور $r > 0$ ہے۔

معطیہ : $a + ar = 8$ اور $ar^2 + ar^3 = 72$

اب $ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) = 72$

$\Longrightarrow\quad r^2(8) = 72 \quad\therefore\quad r = \pm 3$

چونکہ $r > 0$ ہے، ہمارے پاس $r = 3$ ہے

اب $a + ar = 8 \quad\Longrightarrow\quad a = 2$

چنانچہ ہندسی سلسلہ اس طرح سے ہے $2 + 6 + 18 + 54.$

مثال 2.27 سلسلہ $6 + 66 + 666 + \ldots$ میں n رقموں تک حاصل جمع معلوم کیجئے۔

حل : غور کیجئے کہ دیا گیا سلسلہ ہندسی سلسلہ نہیں ہے۔

ہمیں معلوم کرنا ہے کہ $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots$ n رقموں تک

$S_n = 6(1 + 11 + 111 + \cdots$ n رقموں تک $)$

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots$ n رقموں تک $)$ (9 سے ضرب اور تقسیم کریں)

$= \frac{2}{3}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots$ n رقموں تک $]$

$= \frac{2}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 +$ n رقمیں $) - n]..$

لہٰذا $$S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n-1)}{9} - n\right].$$

مثال 2.28 :

کسی شہر کی ایک تنظیم 25 گلیوں میں پیڑ اس طرح لگوانا چاہتی ہے کہ پہلی گلی میں ایک پودا، دوسری گلی میں دو پودے اور تیسری گلی میں چار پودے، چوتھی گلی میں آٹھ پودے اسی طرح سے یہ سلسلہ چلتا ہے۔ کام ختم کرنے کے لئے کتنے پودوں کی ضرورت پڑے گی؟

حل : 25 گلیوں میں لگانے کے لئے درکار پودوں کی تعداد ایک G.P. بناتے ہیں۔ فرض کریں کہ کل درکار پودوں کی تعداد Sn ہے۔

تو $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ 25 رقموں تک .

یہاں $a = 1, \quad r = 2, \quad n = 25$

$$S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$$

$$S_{64} = (1)\ \frac{[2^{25} - 1]}{2 - 1}$$

$$= 2^{25} - 1$$

چنانچہ جملہ درکار پودوں کی تعداد $2^{25}-1$ ہے۔

مشق 2.5

1۔ ہندسی سلسلہ $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$. میں پہلی 20 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

2۔ ہندسی سلسلہ $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$. میں پہلی 27 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

3۔ ذیل میں ہر ایک ہندسی سلسلے کے لئے Sn معلوم کیجئے۔

(i) $a = 3, \ t_8 = 384, \ n = 8.$ (ii) $a = 5, \ r = 3, \ n = 12.$

4۔ ذیل کے محدود سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

(i) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + (0.1)^9$ (ii) $1 + 11 + 111 + \cdots$ 20 رقموں تک

5۔ ذیل میں پہلی رقم کے بعد کتنی متواتر رقمیں مطلوب ہیں؟

(i) $3 + 9 + 27 + \cdots$ 1092 حاصل کرنے کے لئے (ii) $2 + 6 + 18 + \cdots$ 728 حاصل کرنے کے لئے

6۔ ایک ہندسی سلسلہ کی دوسری رقم 3 ہے اور اس کی مشترک نسبت $\frac{4}{5}$ ہے۔ ہندسی سلسلے میں پہلی 23 متواتر رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو

7۔ 4 رقموں والے ایک ہندسی سلسلہ جس کی مشترک نسبت مثبت ہے، اس کی پہلی دو رقموں کا حاصل جمع 9 ہے اور آخری دو رقموں کا حاصل جمع 36 ہے۔ سلسلہ معلوم کرو۔

8۔ درج ذیل سلسلہ میں پہلے n رقموں کا مجموعہ معلوم کرو۔

(i) $7 + 77 + 777 + \cdots.$ (ii) $0.4 + 0.94 + 0.994 + \cdots.$

9۔ کسی وبا کے پھیلنے کی وجہ سے پہلے ہفتہ میں 5 لوگ مرض کا شکار ہوئے اور اس سے متاثر ہر شخص کی وجہ سے یہ متعدی مرض دوسرے ہفتہ تک چار چار آدمیوں میں پھیل گیا۔ 15 ویں ہفتہ تک کتنے لوگ اس مرض سے متاثر ہوئے ہوں گے؟

10۔ ایک لڑکے کے اچھے اخلاق کی وجہ سے ایک باغ کا مالی اسے کچھ آم تحفہ کے طور پر دینا چاہتا ہے۔ وہ اس بچے کو دو طرح کی پیشکش رکھتا ہے۔ پہلی یہ کہ وہ 1000 آم ایک ساتھ حاصل کرلے یا دوسری یہ کہ پہلے دن ایک آم، دوسرے دن دو آم، تیسرے دن 4 آم، چوتھے دن 8 آم۔ اس طرح وہ دس دن تک حاصل کرے۔ زیادہ آم حاصل کرنے کے لئے لڑکا کونسی پیشکش قبول کرے ؟

11۔ ایک ہندسی سلسلے میں رقموں کی تعداد جفت ہے۔ تمام رقموں کا حاصل جمع طاق رقموں کے حاصل جمع کا تگنا ہوتے ہیں۔ اس کی مشترک نسبت معلوم کرو۔

12۔ اگر کسی ہندسی سلسلے کی پہلی n ، 2n ، 3n رقموں کا حاصل جمع بالترتیب S_1, S_2, S_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$$

غور کریں

$a=1$ اور مشترک نسبت $x \neq 1$ والے ایک ہندسی سلسلے میں پہلی n رقموں کا حاصل جمع اس طرح دیا گیا ہے

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad . \; x \neq 1$$

غور کریں کہ درج بالا مساوات کے بائیں جانب ایک خاص کثیر رقمی x ہے جس کا درجہ n–1 ہے۔ یہ ضابطہ بعض سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔

2.5.3۔ خصوصی سلسلہ $\sum_{k=1}^{n} k^3$ اور $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k$ Special Series

ہم نے پہلے ہی Σ (سِگما) کو جمع کے لئے استعمال کیا ہے۔

آیئے محدود سلسلے کی دیگر مثالیں دیکھیں جن میں Σ ترقیم استعمال کی گئی ہے۔

شمار عدد	ترقیم	پھیلاؤ
1.	$\sum_{k=1}^{n} k$ یا $\sum_{j=1}^{n} j$	$1 + 2 + 3 + \cdots + n$
2.	$\sum_{n=2}^{6} (n-1)$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$
3.	$\sum_{d=0}^{5} (d+5)$	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
4.	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$
5.	$\sum_{k=1}^{10} 3 = 3\sum_{k=1}^{10} 1$	$3[1 + 1 + \cdots 10$ رقموں تک$] = 30$

ہم پہلے ہی $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ اخذ کر چکے ہیں۔

A.P. $a=1$, $d=1$ and $l=n$ استعمال کر کے $S_n=\dfrac{n}{2}(a+l)=\dfrac{n}{2}(1+n)$.

Σ ترقیم استعمال کر کے اسے اس طرح لکھتے ہیں۔ $\sum\limits_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

آیئے اس کے لئے ضابطہ بنائیں۔

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$, (ii) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$ (iii) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3$.

ثبوت : (i) آیئے معلوم کریں کہ

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

یہ ایک A.P. حسابی سلسلہ ہے جس میں n رقمیں ہیں $a=1,\ d=2,\ l=(2n-1)$.

$\therefore \quad S_n=\dfrac{n}{2}(1+2n-1)=n^2 \qquad \left(S_n=\dfrac{n}{2}(a+l)\right)$

لہٰذا $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ (1)

غور کریں

1۔ ضابطہ (1) کو ہم درج ذیل طریقے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k-\sum_{k=1}^{n}1=2\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-n=\frac{2(n)(n+1)}{2}-n=n^2.$$

2۔ (1) سے $1+3+5+\cdots+l=\left(\dfrac{l+1}{2}\right)^2$ چونکہ $l=2n-1 \implies n=\dfrac{l+1}{2}$.

(ii) ہم جانتے ہیں کہ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$\therefore \quad k^3-(k-1)^3=k^2+k(k-1)+(k-1)^2$ (لیں $a=k$ اور $b=k-1$)

$\implies \quad k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$ (2)

جب $k=1$, $\quad 1^3-0^3=3(1)^2-3(1)+1$

جب $k=2$, $\quad 2^3-1^3=3(2)^2-3(2)+1$

جب $k=3$, $\quad 3^3-2^3=3(3)^2-3(3)+1$ سلسلہ جاری رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

جب $k=n$, $\quad n^3-(n-1)^3=3(n)^2-3(n)+1$

$k=1,2,\ldots,n$ کی مساوات کو قطار وار کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$n^3=3[1^2+2^2+\cdots+n^2]-3[1+2+\cdots+n]+n$$

لہٰذا $3[1^2+2^2+\cdots+n^2]=n^3+3[1+2+\cdots+n]-n$

$$3\left[\sum_{k=1}^{n}k^2\right]=n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n$$

چنانچہ $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (3)

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

اس نمونہ کا مشاہدہ کریں

$$1^3 = 1 = (1)^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2$$

اس نمونہ کو n رقموں تک توسیع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [1+2+3+\cdots+n]^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

لہٰذا $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$ (4)

(i) پہلے n طبعی اعداد کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$

(ii) پہلے n طاق طبعی اعداد کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$

(iii) پہلے n طاق طبعی اعداد کا حاصل جمع (اگر آخری رقم l دی گئی ہو تو)

$$1+3+5+\cdots+l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

(iv) پہلے n طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(v) پہلے n طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$

مثال 2.29 درج ذیل سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60$ (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots$ 25 رقموں تک (ii) $31 + 33 + \cdots + 53.$

حل : (i) ہمارے پاس ہے

$$26 + 27 + 28 + \cdots + 60 = (1+2+3+\cdots+60) - (1+2+3+\cdots+25)$$
$$= \sum_{1}^{60} n - \sum_{1}^{25} n$$
$$= \frac{60(60+1)}{2} - \frac{25(25+1)}{2}$$
$$= (30 \times 61) - (25 \times 13) = 1830 - 325 = 1505.$$

(ii) یہاں پر $n = 25$

$\therefore \quad 1 + 3 + 5 + \cdots$ 25 رقموں تک $= 25^2 \qquad \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\right)$

$= 625.$

$31 + 33 + \cdots + 53$

$= (1 + 3 + 5 + \cdots + 53) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 29)$

$= \left(\frac{53+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29+1}{2}\right)^2 \qquad \left(1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2\right)$

$= 27^2 - 15^2 = 504.$

مثال 2.30

درج ذیل سلسلے کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$ (ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$.

حل :

(i) یہاں پر

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = \sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{(25)(26)(51)}{6}$$

$$\therefore \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = 5525.$$

(ii) یہاں پر

$$12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 35^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2)$$

$$= \sum_{1}^{35} n^2 - \sum_{1}^{11} n^2$$

$$= \frac{35(35+1)(70+1)}{6} - \frac{11(12)(23)}{6}$$

$$= \frac{(35)(36)(71)}{6} - \frac{(11)(12)(23)}{6}$$

$$= 14910 - 506 = 14404.$$

(iii) یہاں پر

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 51^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots 50^2)$$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 2^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2]$$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 4\sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{51(51+1)(102+1)}{6} - 4 \times \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$$

$$= \frac{(51)(52)(103)}{6} - 4 \times \frac{25(26)(51)}{6}$$

$$= 45526 - 22100 = 23426.$$

مثال 2.31

درج ذیل سلسلے کا حاصل جمع معلوم کرو

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$ (ii) $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 28^3$

حل :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 20^3 = \sum_{1}^{20} n^3$$

$$= \left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2$$

استعمال کرتے ہوئے $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

$$= \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 = (210)^2 = 44100.$$

(ii) اب ہم فرض کرتے ہیں

$$11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3$$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 28^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$$

$$= \sum_{1}^{28} n^3 - \sum_{1}^{10} n^3$$

$$= \left[\frac{28(28+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2$$

$$= 406^2 - 55^2 = (406 + 55)(406 - 55)$$

$$= (461)(351) = 161811.$$

مثال 2.32

اگر $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ ہو تو k کی قیمت معلوم کرو۔

حل : غور کیجئے کہ k ایک مثبت سالم عدد ہے۔

دیا گیا ہے کہ : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$

$$\Longrightarrow \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 4356 = 6 \times 6 \times 11 \times 11$$

جذر المربع لینے پر حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{k(k+1)}{2} = 66$

$$\Longrightarrow k^2 + k - 132 = 0 \Longrightarrow (k+12)(k-11) = 0$$

چنانچہ $k = 11$، چونکہ k مثبت ہے۔

مثال 2.33

(i) اگر $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 120$ ہوتو $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3$. معلوم کرو

(ii) اگر $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 36100$, ہوتو $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. معلوم کرو۔

حل :

(i) دیا گیا ہے۔ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 120$ i.e. $\dfrac{n(n+1)}{2} = 120$

$$\therefore \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 120^2 = 14400$$

(ii) دیا گیا ہے۔ Given $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 36100$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 36100 = 19 \times 19 \times 10 \times 10$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 190$$

لہٰذا $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 190.$

مثال 2.34

14 مربعوں کا کل رقبہ معلوم کیجئے، جن کے اضلاع بالترتیب 10 سمر، 11 سمر، 12 سمر .....24 سمر ہوں۔

حل : مربعوں کے رقبوں کو سلسلہ وار ترتیب دینے پر $11^2 + 12^2 + \cdots + 24^2$

14 مربعوں کا کل رقبہ $= 11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 24^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 24^2) - (1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 10^2)$$

$$= \sum_{1}^{24} n^2 - \sum_{1}^{10} n^2$$

$$= \frac{24(24+1)(48+1)}{6} - \frac{10(10+1)(20+1)}{6}$$

$$= \frac{(24)(25)(49)}{6} - \frac{(10)(11)(21)}{6}$$

$$= 4900 - 385$$

$= 4515$ مربع سمر

مشق 2.6

1۔ درج ذیل سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + 45$

(ii) $16^2 + 17^2 + 18^2 + \cdots + 25^2$

(iii) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

(iv) $7 + 14 + 21 \cdots + 490$

(v) $5^2 + 7^2 + 9^2 + \cdots + 39^2$

(vi) $16^3 + 17^3 + \cdots + 35^3$

2۔ درج ذیل سلسلوں میں k کی قیمتیں معلوم کرو۔

(i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=6084$ (ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=2025$

3۔ اگر $1+2+3+\cdots+p=171,$ ہوتو $1^3+2^3+3^3+\cdots+p^3$ معلوم کرو۔

4۔ اگر $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=8281$ ہوتو $1+2+3+\cdots+k.$ معلوم کرو۔

5۔ 12 مربعوں کا کل رقبہ معلوم کیجیے، جن کے اضلاع بالترتیب 12 سمر، 13 سمر، ..... 23 سمر ہوں۔

6۔ 15 مکعبوں کا کل حجم معلوم کیجیے، جن کے اضلاع بالترتیب 16 سمر، 17 سمر، 18 سمر .....30 سمر ہوں۔

مشق 2.7

1۔ ذیل کا کونسا جملہ صحیح نہیں ہے ؟

(A) N پر واضح کیا گیا ایک حقیقی قیمت رکھنے والا تفاعل ایک تواتر ہے۔

(B) ہر تفاعل ایک تواتر کو ظاہر کرتا ہے۔

(C) ایک تواتر میں لامحدود رقمیں ہوسکتی ہیں۔

(D) ایک تواتر میں محدود رقمیں ہوسکتی ہیں۔

2۔ $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ سلسلے کی 8ویں رقم

(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 21

3۔ $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots$ سلسلے کی بعد کی رقم

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{18}$

4۔ اگر m,l,c,b,a ایک A.P. ہوں تو $a-4b+6c-4l+m$ کی قیمت

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

5۔ اگر c,b,a ایک A.P. ہوں تو $\frac{a-b}{b-c}$ مساوی ہے

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{c}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) 1

6۔ اگر کسی تواتر کی n ویں رقم $100n+10,$ ہو تو وہ تواتر

(A) ایک A.P. ہوگا (B) ایک G.P. ہوگا (C) ایک مستقل تواتر ہوگا (D) نہ تو A.P ہوگا نہ تو G.P ہوگا

7۔ اگر $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ایک A.P. میں اس طرح سے ہوں کہ $\frac{a_4}{a_7}=\frac{3}{2}$ تب اس A.P. کی 13ویں رقم

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 0 (C) $12a_1$ (D) $14a_1$

8۔ اگر $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ایک A.P. ہوتو سلسلہ a_5, a_{10}, a_{15} .....

(A) ایک G.P ہوگا (B) ایک A.P. ہوگا (C) نہ تو A.P ہوگا نہ تو G.P (D) A.P اور G.P دونوں ہوگا

9۔ اگر $k+2, 4k-6, 3k-2$ کسی A.P. کی تین متواتر رقمیں ہوں تو k کی قیمت

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10۔ اگر a, b, c, l, m, n ایک A.P. ہوں تو $3a+7, 3b+7, 3c+7, 3l+7, 3m+7, 3n+7$

(A) ایک G.P. ہوگا (B) ایک A.P. ہوگا (C) ایک مستقل تواتر ہوگا (D) نہ تو A.P. ہوگا نہ تو G.P. ہوگا

11۔ ایک G.P. کی تیسری رقم 2 ہے تو پہلی 5 رقموں کا حاصل ضرب

(A) 5^2 (B) 2^5 (C) 10 (D) 15

12۔ اگر a,b,c ایک G.P. ہوں تو $\frac{a-b}{b-c}$ مساوی ہے

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{b}{c}$ (D) $\frac{c}{b}$

13۔ اگر $x, 2x+2, 3x+3, ...$ ایک G.P. میں ہوں تو $5x, 10x+x, 15x+15, ...$

(A) ایک A.P. ہوگا (B) ایک G.P. ہوگا (C) ایک مستقل تواتر ہوگا (D) نہ تو A.P. ہوگا نہ تو G.P. ہوگا

14۔ تواتر $-3, -3, -3, ...$ ایک

(A) صرف ایک A.P. ہوگا (B) صرف ایک G.P. ہوگا (C) نہ تو A.P. ہوگا نہ تو G.P (D) A.P اور G.P دونوں ہوگا

15۔ اگر کسی G.P. کی پہلے چار متواتر رقموں کا حاصل ضرب 256 ہو اور اگر اس کی مشترک نسبت 4 اور پہلی رقم مثبت ہو تو اس کی تیسری رقم

(A) 8 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) 16

16۔ کسی G.P. میں $t_2 = \frac{3}{5}$ اور $t_3 = \frac{1}{5}$ تو اس کی مشترک نسبت

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 5

17۔ اگر $x \neq 0$ ہو تو $1 + \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x + \sec^5 x$ مساوی ہے۔

(A) $(1 + \sec x)(\sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (B) $(1+\sec x)(1+\sec^2 x + \sec^4 x)$

© $(1- \sec x)(\sec x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (D) $(1+ \sec x)(1 + \sec^3 x + \sec^4 x)$

18۔ ایک A.P. کی n ویں رقم $t_n = 3-5n$ ہے، اس کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع

(A) $\frac{n}{2}[1-5n]$ (B) $n(1-5n)$ (C) $\frac{n}{2}(1+5n)$ (D) $\frac{n}{2}(1+n)$

19۔ G.P a^{m-n}, a^m, a^{m+n} کی مشترک نسبت

(A) a^m (B) a^{-m} (C) a^n (D) a^{-n}

20۔ اگر $1+2+3+...+n = k$ ہو تو $1^3+2^3+...+n^3$ برابر ہے

(A) k^2 (B) k^3 (C) $\frac{k(k+1)}{2}$ (D) $(k+1)^3$

یاد رکھنے کے نکات

⌘ حقیقی اعداد کی فہرست ایک خاص ترتیب میں ہو تو اس کو تواتر کہتے ہیں۔

⌘ تواتر جس میں $F_1 = F_2 = 1$ اور $n = 3,4$ کے لئے $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n = 3,4, \ldots$ کو "فیبو ناکی تواتر" کہا جاتا ہے۔

⌘ ایک تواتر $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ اس وقت حسابی سلسلہ کہلائے گا جب $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$ ہو جس میں d ایک مستقل ہو۔ یہاں پر a1 پہلی رقم اور d عام فرق کہلائے گی۔ حسابی تواتر کو حسابی سلسلہ بھی کہتے ہیں۔ (A.P)

ایک A.P. کی عام رقم ہے۔ $t_n = a + (n-1)d \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

⌘ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ایک ہندسی سلسلہ کہلاتا ہے۔ اگر $a_{n+1} = a_n r$ جہاں $r \neq 0$ ہے، $r, n \in N$ مستقل ہے۔

a_1 پہلی رقم r مشترک نسبت ہے۔ G.P. کی عام رقم $t_n = ar^{n-1}$ ہے۔ $n = 1,2,3,\ldots$

⌘ ایک تواتر کے رقموں کے مجموعہ کو سلسلہ کہتے ہیں، اگر اس مجموعہ میں محدود رقمیں ہوں تو اس کو محدود سلسلہ کہتے ہیں۔

اگر مجموعہ میں لامحدود رقمیں ہوں تو اس کو لامحدود سلسلہ کہتے ہیں۔

⌘ ایک حسابی سلسلے میں پہلی رقم a ہو تو پہلے n رقموں کا حاصل جمع Sn اس طرح دیا گیا ہے۔

(i) اگر عام فرق d دیا گیا ہو تو $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ (ii) اگر آخری رقم l دی گئی ہو تو $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

⌘ ایک ہندسی سلسلہ میں پہلے n عددوں کا حاصل جمع اس طرح دیا گیا ہے۔

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & \text{اگر } r \neq 1 \\ na & \text{اگر } r = 1. \end{cases}$$

جس میں a پہلی رقم ہے اور r مشترک نسبت ہے۔

⌘ پہلے n طبعی اعداد کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

⌘ پہلے n طاق طبعی اعداد کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

⌘ پہلے n طاق طبعی اعداد کا حاصل جمع (اگر آخری رقم l دی گئی ہو تو) $1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2$.

⌘ پہلے n طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

⌘ پہلے n طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

کیا تم جانتے ہو ؟

مرسین عدد، $M = 2^p - 1$ کی شکل کا ایک مثبت سالم عدد ہے جو میرن مرسین کے نام سے موسوم ہے۔ اگر M ایک اولیٰ عدد ہو تو اسے مرسین اولیٰ عدد کہتے ہیں۔ دلچسپ بات یہ ہے کہ اگر $2^p - 1$ ایک اولیٰ عدد ہو تو p بھی اولیٰ عدد ہوگا۔ سب سے بڑا معلوم شدہ اولیٰ عدد $2^{43,112,609} - 1$ مرسین اولیٰ کہلاتا ہے۔

3

الجبرا (ALGEBRA)

The human mind has never invented a labour-saving machine equal to algebra - Author unknown

3.1۔ تعارف

الجبرا علم ریاضی کی ایک اہم اور نہایت ہی قدیم شاخ ہے جو الجبرائی مساوات کو حل کرنے میں کام آتی ہے۔ تیسری صدی میں یونانی حساب دان ڈیوفانٹس (Diophantus) نے ایک Arithmetic نامی ایک کتاب لکھی، جس میں عملی حسابوں کی بہت بڑی تعداد تھی۔ چھٹویں اور ساتھویں صدی میں ہندوستانی ریاضی دان جیسے آریہ بھٹا اور برہمہ گپتا نے خطی مساوات اور دودرجی مساوات پر کام کیا۔ اُنہیں حل کرنے کے عام طریقوں کو فروغ دیا۔

الجبرا میں دوسری بڑی ترقی نویں صدی میں عربی ریاضی دان کے ذریعے ہوئی، خاص طور پر الخوارزمی کے کتاب کے عنوان

"Compendium on calculation by completion and balancing"
ایک اہم کارنامہ تھا۔ جس کو لفظِ الجبرا کہہ کر استعمال کیا جسے لاطینی زبان میں الجبرا کہا جاتا ہے۔ الجبرا کا ترجمہ مقابلہ یا دوبارہ حاصل کرنے کے طور پر کیا گیا۔ تیرھویں صدی میں Leonardo Fibonacci کی کتاب الجبرا کے متعلق بہت اہم اور کارآمد ثابت ہوئی۔ اٹلی کے ریاضی دان Luca Pacioli (1445 - 1517) اور انگریزی ریاضی دان Robert Recorde (1510 - 1558) نے الجبرا پر بہت زیادہ کام کیا۔

بعد کی صدیوں میں الجبرا پھولا پھلا۔ اُنیسویں صدی میں برطانوی ریاضی دان الجبرا کے فروغ میں سب سے آگے تھے۔ Peacock (1791-1858) الجبرا میں موضوعی تصور کا بانی مانا جاتا ہے۔ اس کارنامہ کے لئے اُسے الجبرا کا اقلیدس بھی کہا گیا۔ ڈی مارگن (برطانیہ 1806-71) نے پیاکاک کے کام کو علاماتی شکل دی۔

اس باب میں ہم خطی مساوات اور دودرجی مساوات کو حل کرنے کی تکنیک سیکھیں گے۔

الخوارزمی

(780 - 850)

علم ریاضی اور جغرافیہ میں الخوارزمی کی بیش بہا خدمات الجبرا اور علم مثلث کی تجدید کی بنیاد بنے۔ انہوں نے سب سے پہلے خطی مساوات اور دودرجی مساوات کا ترکیبی حل پیش کیا۔

ان کو الجبرا کا بانی مانا جاتا ہے۔ ہندوستانی علم ریاضیات کو مغربی دنیا تک پہنچانے اور عربی ہندسے اور ہندو-عربی ہندسوں کے تعارف کروانے کا سہرا انہیں کے سر ہے۔

3.2 دونامعلوم میں خطی مساوات کا نظام

نویں جماعت میں خطی مساوات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ $a\neq0, ax + b = 0$ اور جسمیں x کی قیمت ایک نامعلوم عدد ہے۔غور کیجئے کہ خطی مساوات $ax + by = c$ کے دو متغیرات x اور y میں سے،جس میں a اور b میں سے کوئی ایک عدد غیر صفری ہو۔عدد x ، اور y میں جوڑی کو ترتیب دینے پر (x_0 , y_0) کہلاتا ہے اگر اس کی قیمتیں $x = x_0 , y = y_0$ مساوات کی شرط کو پوری کرتی ہیں۔

ہندسوی طور پر خطی مساوات کی ترسیم $ax + by = c$ ایک مسطح پر خطِ مستقیم ہے۔ لہٰذا اس خط کا ہر نقطہ (x , y) مساوات $ax + by = c$ کا حل ہوگا۔اس کے برعکس مساوات کا ہر ایک حل اُس خطِ مستقیم پر کا ایک نقطہ ہے۔چنانچہ مساوات $ax + by = c$ لا محدود حل رکھتا ہے۔

خطی مساوات کے محدود عدد کے سٹ میں دونا معلوم قیمتیں x اور y جو ایک ساتھ عمل کرتے ہیں،x اور y میں **خطی مساوات کا نظام** کہلاتے ہیں۔اس طرح کی مساوات کو Simultaneous equations مساواتِ مرکب کہا جاتا ہے۔

> **تعریف**
> ایک ترتیب وار جوڑی (x_0 , y_0) کو دو متغیرات والے خطی نظام کا **حل** کہا جاتا ہے۔اگر قیمتیں $x = x_0 , y = y_0$ اس نظام کے تمام مساوات کی شرط پوری کرے۔

خطی مساوات کا نظام

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

دو متغیرات میں یہ کہا جاتا ہے۔

1. **یکساں** اگر کم از کم x اور y کے قیمتوں کی ایک جوڑی دونوں مساوات کی شرط پوری کرتی ہے۔
2. **غیر یکساں** اگر x اور y کی کوئی بھی قیمت دونوں مساوات کی شرط پوری نہیں کرتی۔

اس حصّے میں ہم دو متغیر والے خطی مساوات کی جوڑی کے بارے میں بحث کریں گے۔

> **برائے ذہن نشینی**
> (i) $ax + by = c$ شکل کی مساوات **خطی** کہلاتی ہے۔کیونکہ متغیرات صرف پہلے درجے کے ہیں۔اور اس مساوات میں متغیرات کا حاصلِ ضرب نہیں ہے۔
> (ii) دو سے زیادہ متغیرات میں بھی خطی نظام ممکن ہے۔جسے آپ بڑی جماعتوں میں سیکھو گے۔

آیئے ہم ایک نظام پر غور کریں۔

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \qquad (1) \\ a_2x + b_2y &= c_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

دو متغیرات x اور y میں جہاں مستقل $a_1\, b_1$ اور $a_2\, b_2$ کی قیمت صفر ہو سکتی ہے سوائے اس کے کہ وہ کم از کم ایک متغیر رکھتا ہو یا مختصراً

$$a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \ , \ a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$$

ہندسوی طور پر ذیل کے مواقع ہو سکتے ہیں۔ دو خطوط مستقیم (1) اور (2) نمائندگی کرتا ہے۔

(i) ٹھیک ایک نقطہ پر قطع کر سکتے ہیں۔ (ii) کسی بھی نقطہ پر قطع نہیں ہو سکتے۔ (iii) ایک دوسرے پر منطبق ہو سکتے ہیں۔

اگر (i) واقع ہے تو نقطہ تقاطع اس نظام کا ایک الگ عجیب حل دیتا ہے۔اگر (ii) واقع ہوتو اس نظام کا کوئی حل نہیں ہے۔اگر (iii) واقع ہوتو اس خط پر کا ہرایک نقطہ اس نظام کا حل ہوگا۔چنانچہ اس نظام کے کئی حل ہوں گے۔

اب ہم ذیل میں دئے گئے الجبرائی طریقے کے استعمال سے دونا معلوم قسموں میں خطی مساوات کے نظام کو حل کریں گے۔

(i) اخراج کا طریقہ (ii) ترچھی ضرب کا طریقہ

3.2.1 اخراج کا طریقہ (Elimination Method) :

اس طریقے میں ہم مساواتوں کے نظام کو اسطرح سے جوڑ سکتے ہیں کہ کوئی نا معلوم قیمت خارج ہو جائے۔ایک نا معلوم قیمت کو ذیل کے طریقے سے خارج کر سکتے ہیں۔

دی گئی دونوں مساواتوں کو ضرب یا تقسیم کریں تا کہ متغیر ہند سے کوئی ایک عددی طور پر مساوی ہو۔اگر عددی طور پر مساوی ضریب مخالف نشان والے ہوتو نئی مساوات کو جمع کیجئے ورنہ تفریق کیجئے۔

(i) مساوات کے رکن (member) کے سراعداد کو اس طرح کے اعداد سے ضرب یا تقسیم کرے کے خارج کئے جانے والے نا معلوم قیمت کا سر عدد عددی طور پر مساوی ہو۔

(ii) پھر اگر حاصل شدہ اور عدد غیر مماثل علامت رکھتے ہوں تو جمع کے طریقے سے خارج کریں، اور اگر وہ یکساں علامت رکھتے ہوں تو تفریق کے طریقے سے۔

مثال 3.1 حل کیجئے۔ $2x + 5y = 31$ ، $3x - 5y = -16$

حل : دئے گئے مساوات

$$3x - 5y = -16 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 31 \qquad (2)$$

نوٹ کیجئے۔دونوں مساواتوں میں y کے ضریب عددی طور پر مساوی ہیں۔اسلئے ہم y کو آسانی سے خارج کر سکتے ہیں۔

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$5x = 15$$

یعنی $x = 3$

$x = 3$ کو (1) یا (2) میں درج کریں تا کہ y حاصل ہو۔

$x = 3$ کو (1) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا کہ $3(3) - 5(y) = -16$

$$\Longrightarrow y = 5$$

اس مساوات کا حل (3,5) ہے۔کیونکہ (1) اور (2) صحیح ہے جب $x = 3$ اور $y = 5$ (1) اور (2) میں درج کریں۔

$3(3) - 5(5) = -16$ اور $2(3) + 5(5) = 31$

غور کریں

صرف ایک متغیر میں مساوات (3) حاصل کرنا،حل معلوم کرنے کی ایک اہم منزل ہے۔مساوات (3) میں متغیر y کو خارج کر کے ہم متغیر (x) حاصل کرتے ہیں۔اس طرح پہلے کسی ایک متغیر کو خارج کر کے حل حاصل کرنے کا طریقہ **اخراج کا طریقہ** کہلاتا ہے۔

مثال 3.2

11 پنسلوں اور 3 ربڑوں کی قیمت 50 ₹ ہے اور 8 قلموں 3 ربڑوں کی قیمت 38 ₹ ہے۔ایک قلم اور ایک ربڑ کی قیمت کیا ہوگی؟

حل : فرض کیجئے کہ پنسل کی قیمت کو x روپئے اور ربڑ کی قیمت کو y سے نشاندہی کی جاتی ہے۔چنانچہ معطیات کے مطابق

$$11x + 3y = 50 \quad (1)$$

$$8x + 3y = 38 \quad (2)$$

(1) سے (2) کو تفریق کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$3x = 12 \,;\, x = 4$$

y کی قیمت حاصل کرنے کیلئے $x = 4$ کو مساوات (1) میں درج کریں۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے $11(4) + 3y = 50$

$$y = 2$$

چنانچہ $x = 4$; اور $y = 2$ دی گئی مساوات کی جوڑی کا حل ہے۔

غرض ایک پنسل کی قیمت 4 ₹ اور ایک ربڑ کی قیمت 2 ₹ ہے۔

غور کریں

ہمیشہ یہ جانچ کرنا بہتر ہے کہ حاصل شدہ قیمتیں دونوں مساوات کی شرط کو پورا کرتی ہیں۔

مثال 3.3

اخراج کے طریقے سے حل کیجئے۔ $3x + 4y = -25$ ، $2x - 3y = 6$

حل :

$$3x + 4y = -25 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 6 \quad (2)$$

x کو خارج کرنے کیلئے مساوات (1) کو 2 سے ضرب دیں۔اور (2) کو -3 سے۔

$$(1) \times 2 \implies 6x + 8y = -50 \quad (3)$$

$$(2) \times -3 \implies -6x + 9y = -18 \quad (4)$$

(3) اور (4) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $17y = -68$

$$y = -4$$

$y = -4$ کو مساوات (1) میں درج کریں تو حاصل ہوگا۔

$$3x + 4(-4) = -25$$

$$x = -3$$

حل $= (-3, -4)$

برائے ذہن نشینی

مثال 3.3 میں یہ ممکن نہیں ہے کہ صرف مساوات کی جمع یا تفریق سے کسی ایک متغیر کو خارج کریں۔جیسا کہ ہم نے مثال 3.1 میں کیا تھا۔چنانچہ ہم چند تبدیلیاں کریں گے۔تاکہ کسی ایک x یا y کے سر عدد مساوی ہوں سوائے علامت کے۔پھر ہم خارج کرتے ہیں۔

مثال 3.4 اخراج طریقے سے حل کیجئے۔ $101x + 99y = 499 \; ; \; 99x + 101y = 501$

حل : دیئے گئے مساوات

$$101x + 99y = 499 \qquad (1)$$
$$99x + 101y = 501 \qquad (2)$$

یہاں پر ہمیں کسی ایک متغیر کو خارج کرنے کے لئے مساوات کو کسی مناسب عدد کے ساتھ ضرب دیں۔

یہاں پر مساوات کو کسی مناسب عدد سے نوٹ کیجئے کہ x کی قیمت مساوات (1) میں دوسرے مساوات میں y کی قیمت کے برابر ہے۔دونوں مساوات کو ہم جمع یا تفریق کریں تا کہ ایک نیا طریقہ معلوم ہو۔جو آسانی سے مساوات کو حل کر سکیں۔

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$200x + 200y = 1000$$

200 سے تقسیم کرنے پر $\quad x + y = 5 \qquad (3)$

(2) کو (1) سے تفریق کریں۔ $\quad 2x - 2y = -2$

$$x - y = -1 \qquad (4)$$

(مساوات (3) اور (4) کو حل کرنے پر) $\quad x = 2 \; ; \; y = 3$

حل کا مجموعہ $= (2 , 3)$

مثال 3.5 اخراج کے طریقے سے حل کیجئے۔ $3(2x + y) = 7xy \; ; \quad 3(x + 3y) = 11xy$

حل : دی گئی مساوات

$$3(2x + y) = 7xy \qquad (1)$$
$$3(x + 3y) = 11xy \qquad (2)$$

دی گئی مساوات خطی مساوات نہیں۔کیونکہ اس کا حاصل xy میں ہے۔

اگر $x = 0$ ہوتو $y = 0$ ہوگا ، مساوات کا حل $(0 , 0)$ ہوگا۔اوردوسرا حل $x \neq 0$ اور $y \neq 0$ دونوں کا ہوگا۔چنانچہ ہم حل

$x \neq 0$ اور $y \neq 0$ کو فرض کرتے ہوئے

دونوں جانب مساوات کو xy سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 7, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 7 \qquad (3)$$

$$\frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 11 \qquad (4)$$

فرض کریں کہ $a = \frac{1}{x}$ اور $b = \frac{1}{y}.$

خطی مساوات(3) اور (4) اس طرح بن جاتے ہیں

$$3a + 6b = 7 \qquad (5)$$
$$9a + 3b = 11 \qquad (6)$$

جو خطی مساوات a اور b کے نظام میں ہے۔

b کو خارج کرنے کے لئے (7) $(6)\times 2 \Longrightarrow \quad 18a+6b=22$

مساوات (7) کو (5) سے تفریق کریں۔ ہمیں اس طرح حاصل ہوتا ہے $-15a=-15$; یعنی $a=1$

$a=1$ کو مساوات (5) میں بھرتی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے، $b=\frac{2}{3}$ لہٰذا $a=1$ اور $b=\frac{2}{3}$

جب $a=1$ ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{x}=1$ لہٰذا $x=1,$

جب $b=\frac{2}{3}$ ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$ لہٰذا $y=\frac{3}{2}$

لہٰذا اس مساوات کے دو حل ہیں۔ $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ اور $(0,0)$

دی گئی مساوات کو اس طریقہ سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔

$$3(2x+y)=7xy \quad (1)$$

$$3(x+3y)=11xy \quad (2)$$

اب $(2)\times 2-(1) \Rightarrow \quad 15y=15xy$

$\Rightarrow 15y\ (1-x)$ $\quad x=1$ اور $y=0$ جب $x=1$ ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $y=\frac{3}{2}$ اور جب $y=0$ ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $x=0$

لہٰذا مساوات کے دو حل اس طرح ہیں اور $(0,0)$

مشق 3.1

اخراج طریقے سے درج ذیل کے ہر ایک مساوات کے نظام کو حل کریں۔

1. $x+2y=7, \quad x-2y=1$
2. $3x+y=8, \quad 5x+y=10$
3. $x+\frac{y}{2}=4, \quad \frac{x}{3}+2y=5$
4. $11x-7y=xy, \quad 9x-4y=6xy$
5. $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{20}{xy}, \ \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{15}{xy}, \ x\neq 0, y\neq 0$
6. $8x-3y=5xy, \quad 6x-5y=-2xy$
7. $13x+11y=70, \quad 11x+13y=74$
8. $65x-33y=97, \quad 33x-65y=1$
9. $\frac{15}{x}+\frac{2}{y}=17, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{36}{5}, x\neq 0, y\neq 0$
10. $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6}, \ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0, x\neq 0, y\neq 0$

خطی مساوات کے نظام کے لئے حل مجموعہ کی بنیادیت (Cardinality)

فرض کریں کہ دو مساوات کا نظام اس طرح ہے

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad (2)$$

جس میں حقیقی سر اعداد اس طرح ہوں کہ $a_1^2+b_1^2\neq 0 \ , \ a_2^2+b_2^2\neq 0.$

خارج کرنے کے طریقے سے مساوات کے y کے سراعداد کو ضرب کریں۔ مساوات (1) کو b2 سے اور مساوات (2) کو b1 سے۔ ہمیں اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$b_2 a_1 x + b_2 b_1 y + b_2 c_1 = 0 \qquad (3)$$

$$b_1 a_2 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2 = 0 \qquad (4)$$

مساوات (4) کو (3) سے تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(b_2 a_1 - b_1 a_2)x = b_1 c_2 - b_2 c_1 \Longrightarrow x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

بشرطیکہ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

x کی قیمت کو مساوات (1) یا (2) میں بھرتی کرکے y کے لئے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{بشرطیکہ} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

لہٰذا مساوات اس طرح بنتی ہے

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{اور} \quad y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \qquad (5)$$

یہاں ہمیں صورتوں پر غور کرنا ہے۔

صورت (i) یعنی $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. $\quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

اس صورت میں خطی مساوات کا ایک عجیب حل ملتا ہے۔

صورت (ii) $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ یعنی $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ اگر $b_2 \neq 0$ اور $a_2 \neq 0$

اس صورت میں فرض کریں $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$ ہو تو $a_1 = \lambda a_2\,,\ b_1 = \lambda b_2$

اب a1 اور b1 کی قیمت کو مساوات (1) میں بھرتی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1 = 0 \qquad (6)$$

ہمیں آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ دونوں مساوات (6) اور (2) صرف اور صرف اسی وقت شرط پوری کریں گے، جب

$$c_1 = \lambda c_2 \Longrightarrow \frac{c_1}{c_2} = \lambda$$

اگر $c_1 = \lambda c_2$ مساوات (2) کا کوئی بھی حل مساوات (1) کی شرط پوری کرے یا اس کا برعکس

لہٰذا اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda$ تو دیئے گئے خطی مساوات کی جوڑی کے لئے لامحدود حل ہوں گے جو (1) اور (2) کے ذریعے دیئے گئے ہیں

اگر $c_1 \neq c\lambda_2$ ہو تو مساوات (1) کا کوئی بھی حل مساوات (2) کی شرط پوری نہیں کرسکتی اور اس کا برعکس

لہٰذا اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ہو تو (1) اور (2) سے دیئے گئے خطی مساوات کی جوڑیوں کے لئے کوئی حل نہیں ہے۔

غور کریں

اب ہم اوپر کی بحث کا خلاصہ کریں گے۔ مساوات کے نظام کے لئے

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

یہاں $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$

(i) اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ or $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ ہو تو مساواتوں کے نظام کا صرف ایک ہی حل (unique) ہوگا۔

(ii) اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ہو تو مساوات کا نظام کئی لامتناہی حل رکھتا ہے۔

(iii) اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ہو تو مساوات کا نظام کوئی حل نہیں رکھتا ہے۔

3.2.2 کارتیسی ضرب کا طریقہ Cross Multiplication Method

جب خطی مساوات دو نا معلوم عدد x اور y کو اخراج طریقے سے حل کرتے ہیں۔ تو ہم حل، حاصل کرنے کیلئے سر اعداد کو موثر طریقے سے استعمال کر سکتے ہیں۔ یہاں ایک اور طریقہ کارتیسی ضرب کا طریقہ کہلاتا ہے۔ جو طریقے کو آسان کرتا ہے۔ آیئے اب ہم اس طریقے کو بیان کریں۔ اور دیکھیں کہ یہ کس طرح کام کرتا ہے۔

آیئے ہم مساوات کے اس نظام پر غور کریں۔

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0 \qquad (2)$$

ہم پہلے ہی واضح کر چکے ہیں کہ یہ نظام حل رکھتا ہے۔

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

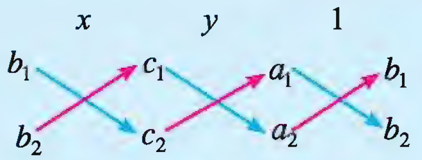
چنانچہ ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

آیئے ہم لکھے ہوئے مسلۂ کو ذیل کی شکل میں لکھیں گے۔

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

نیچے دیئے گئے تیر کے نشان کے طریقے اوپر کے تعلق کو یاد رکھنے کیلئے بہت فائدہ مند ثابت ہوں گے۔



دو اعداد کے درمیان تیر کا نشان یہ ظاہر کرتا ہے کہ یہ ضرب کئے گئے ہیں۔ دوسرا حاصل ضرب (اوپر کی طرف کے تیر کا نشان) کو پہلے حاصل (نیچے کی طرف کے نشان) سے تفریق کیا جاتا ہے۔

اوپر بتائے گئے طریقے سے خطی مساوات کو حل کرنے کا طریقہ **کارتیسی ضرب کا طریقہ** کہلاتا ہے۔

غور کریں کہ درج ذیل اظہار میں ،

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$b_1c_2 - b_2c_1$ یا $c_1a_2 - c_2a_1$ صفر کے برابر ہے مگر $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

لہٰذا مساوات کے نظام کے لئے

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

(i) اگر $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ اور $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$ ہوتو $x = 0$ ہے۔

(ii) اگر $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ اور $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$ ہوتو $y = 0$ ہے۔

اس کے بعد ہم واحد حل رکھنے والے خطی مساوات کی طرف زیادہ توجہ نہیں دیں گے۔ اور کارتیسی ضرب کے طریقے سے حل دریافت کریں گے۔

مثال 3.6 حل کیجئے۔

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y = -11$$

حل : دی گئی مساوات کا نظام ہے

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y + 11 = 0$$

کارتیسی ضرب کے طریقے کیلئے ہم سرعدد کو اسطرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{cccccccc} & x & & y & & 1 & \\ 7 & & -5 & & 2 & & 7 \\ 8 & & 11 & & -3 & & 8 \end{array}$$

چنانچہ ہم کو اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{x}{(7)(11)-(8)(-5)} = \frac{y}{(-5)(-3)-(2)(11)} = \frac{1}{(2)(8)-(-3)(7)}.$$

یعنی $\frac{x}{117} = \frac{y}{-7} = \frac{1}{37}$ یعنی $x = \frac{117}{37},\ y = -\frac{7}{37}.$

چنانچہ حل ہے $\left(\frac{117}{37}, -\frac{7}{37}\right)$

مثال 3.7

کارتیسی ضرب کے طریقے کے استعمال سے حل کیجئے۔ $3x + 5y = 25$

$$7x + 6y = 30$$

حل : دی گئی مساوات کا نظام

$$3x + 5y - 25 = 0$$
$$7x + 6y - 30 = 0$$

کارتیسی ضرب کے لئے سرعدد کو لکھنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{cccccccc} & x & & y & & 1 & \\ 5 & & -25 & & 3 & & 5 \\ 6 & & -30 & & 7 & & 6 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{-150+150} = \frac{y}{-175+90} = \frac{1}{18-35}. \text{ i.e., } \frac{x}{0} = \frac{y}{-85} = \frac{1}{-17}.$$ یعنی

چنانچہ ہمیں $x = 0 , y = 5$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا حل $(0 , 5)$ ہے۔

غور کریں

یہاں پر $\frac{x}{0} = -\frac{1}{17}$ کا مطلب ہے $x = \frac{0}{-17} = 0$ لہٰذا $\frac{x}{0}$ صرف ایک ترقیم ہے اور یہ صفر سے تقسیم نہیں ہوتا۔ صفر سے تقسیم غیر واضح ہے

مثال 3.8

دو ہندسی عدد میں یکائی کے مقام کا ہندسہ دہائی کے مقام کے ہندسے کا دُگنا ہے۔ اگر ہندسوں کو اُلٹا کیا گیا تو نیا عدد دیے گئے عدد سے 27 زیادہ ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے x دس کے مقام کے ہندسے کو ظاہر کرتا ہے۔ اور y یکائی کے مقام کو ظاہر کرتا ہے۔ عدد کو اس طرح $10x + y$ لکھا جاتا ہے۔ پھیلاؤ کے طریقے میں (جیسا کہ $35 = 10(3) + 5$)

جب عدد کو اُلٹا کیا جائے تو x یکائی کے مقام کا عدد اور y دس کے مقام کا ہندسہ بن جاتا ہے۔ بدلا ہوا عدد پھیلاؤ کے طریقے میں $10y + x$ ہے
پہلی شرط کے مطابق ہمیں $y = 2x$ حاصل ہوتا ہے۔ جس کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$2x - y = 0 \qquad (1)$$

دوسری شرط کے مطابق بھی ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(10y + x) - (10x + y) = 27$$

یعنی $-9x + 9y = 27 \implies -x + y = 3 \qquad (2)$

مساوات (1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x = 3$

$x = 3$ کو مساوات (2) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ $y = 6$

چنانچہ دیا گیا عدد ہے $(3 \times 10) + 6 = 36$

مثال 3.9

ایک کسر اس طرح ہے کہ اس کا شمار کنندہ 3 سے ضرب کیا گیا ہے۔ اور نسب نما 3 سے کم کیا گیا ہے تو ہمیں $\frac{18}{11}$ حاصل ہوتا ہے۔
مگر جب شمار کنندہ 8 سے بڑھتا ہے اور نسب نما دُگنا ہوتا ہے تو ہمیں $\frac{2}{5}$ حاصل ہوتا ہے۔ تو کسر معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کرو کہ کسر $\frac{x}{y}$ ہے۔ دی گئی شرائط کے مطابق ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{3x}{y-3} = \frac{18}{11} \quad \text{اور} \quad \frac{x+8}{2y} = \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow 11x = 6y - 18 \quad \text{اور} \quad 5x + 40 = 4y$$

$$11x - 6y + 18 = 0 \quad (1)$$
چنانچہ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔
$$5x - 4y + 40 = 0 \quad (2)$$

(1) اور (2) کے سراعداد کا $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,$ کے ساتھ موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a_1 = 11,\ b_1 = -6,\ c_1 = 18\ ;\quad a_2 = 5,\ b_2 = -4,\quad c_2 = 40.$$

لہٰذا $\quad a_1b_2 - a_2b_1 = (11)(-4) - (5)(-6) = -14 \neq 0.$

چنانچہ لہٰذا یہ نظام ایک الگ حل (واحد) رکھتا ہے۔

اب کارتیسی ضرب کے لئے سراعداد کو لکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{cccccc} & x & & y & & 1 \\ -6 & & 18 & & 11 & & -6 \\ -4 & & 40 & & 5 & & -4 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-240 + 27} = \frac{y}{90 - 440} = \frac{1}{-44 + 30}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-168} = \frac{y}{-350} = \frac{1}{-14}$$

$$x = \frac{168}{14} = 12\ ;\quad y = \frac{350}{14} = 25.$$

لہٰذا کسر ہے $\frac{12}{25}$.

مثال 3.10

8 آدمی اور 12 لڑکے ایک کام کو 10 دن میں ختم کر سکتے ہیں۔ جبکہ اسی کام کو 6 آدمی اور 8 لڑکے 14 دن میں ختم کر سکتے ہیں۔ معلوم کیجئے کہ اس کام کو ختم کرنے میں صرف ایک لڑکا اور ایک آدمی کتنے دنوں میں ختم کریں گے۔

حل :

فرض کرو کہ عدد x ایک آدمی کے کام کرنے کو ظاہر کرتا ہے اور y عدد صرف ایک لڑکے کیلئے کام ختم کرنے کو ظاہر کرتا ہے۔ دنوں کی تعداد $y \neq 0$, $x \neq 0$ عام طور پر اس لئے حصّہ کام ایک آدمی $\frac{1}{x}$ حصّہ کام ایک دن میں ختم کرسکتا ہے۔ اور $\frac{1}{y}$ ایک لڑکا ایک دن میں ختم کرسکتا ہے۔

8 آدمیوں اور 12 لڑکے کے ذریعے ایک دن میں کئے ہوئے کام کی مقدار $\frac{1}{10}$ ہے۔ چنانچہ

$$\frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10} \quad (1)$$
ہمارے پاس ہے۔

ایک دن میں 6 آدمیوں اور 8 لڑکے کے ذریعے کئے گئے کام کی مقدار $\frac{1}{14}$ ہے۔ چنانچہ

$$\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14} \quad (2)$$
ہمارے پاس ہے۔

فرض کرو $a = \frac{1}{x}$ اور $b = \frac{1}{y}$ تو (1) اور (2) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$8a + 12b = \frac{1}{10} \quad \Longrightarrow \quad 4a + 6b - \frac{1}{20} = 0. \quad (3)$$

$$6a + 8b = \frac{1}{14} \quad \Longrightarrow \quad 3a + 4b - \frac{1}{28} = 0. \quad (4)$$

کارتیسی ضرب کے ذریعے (3) اور (4) کے سرعددوں کو لکھتے ہیں تو

$$\begin{array}{cccc} & a & b & 1 \\ 6 & -\frac{1}{20} & 4 & 6 \\ 4 & -\frac{1}{28} & 3 & 4 \end{array}$$

لہٰذا ہمارے پاس ہے

$$\frac{a}{-\frac{3}{14}+\frac{1}{5}} = \frac{b}{-\frac{3}{20}+\frac{1}{7}} = \frac{1}{16-18}$$ یعنی $$\frac{a}{-\frac{1}{70}} = \frac{b}{-\frac{1}{140}} = \frac{1}{-2}.$$

یعنی $a = \frac{1}{140},\ b = \frac{1}{280}$

لہٰذا ہمارے پاس ہے $x = \frac{1}{a} = 140,\ \ y = \frac{1}{b} = 280.$

لہٰذا ایک آدمی اکیلا 140 دنوں میں کام ختم کرسکتا ہے۔اور ایک لڑکا اکیلا 280 دنوں میں کام ختم کرسکتا ہے۔

مشق 3.2

1۔ کارتیسی ضرب کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے ذیل کے مساوات کے نظام کو حل کیجئے۔

(i) $3x + 4y = 24,\ 20x - 11y = 47$ (ii) $0.5x + 0.8y = 0.44,\ 0.8x + 0.6y = 0.5$

(iii) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2,\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ (iv) $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2,\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

2۔ دئے گئے حسابات میں مساوات کی جوڑی بنائیے اور ان کے حل معلوم کیجئے۔

(i) ایک عدد دوسرے عدد کے تگنے سے 2 بڑا ہے۔ اگر چھوٹا عدد کا 4 گنا ہو تو بڑے عدد سے 5 زیادہ ہو تو اعداد معلوم کرو۔

(ii) دو شخص کی تنخواہوں کی نسبت 9:7 اور ان کے خرچ کی نسبت 4:3 ہے اور اگر ہر ایک ₹ 2000 ہر مہینہ بچت کرتے ہیں تو اُن کی تنخواہ معلوم کیجئے۔

(iii) ایک دو ہندسی عدد اس کے ہندسوں کے حاصل جمع کا سات گنا ہے۔ اور عدد کو اُلٹا کیا جائے تو ہندسے میں سے 18 عدد دئے گئے عدد سے کم ہو جاتے ہیں۔عدد معلوم کیجئے۔

(iv) تین کُرسیوں اور دو میزوں کی قیمت ₹ 700 ہے اور 5 کُرسیوں اور 3 میزوں کی قیمت ₹ 1100 ہو تو 2 کُرسیوں اور 3 میزوں کی قیمت معلوم کیجئے۔

(v) ایک مستطیل میں اگر لمبائی اور چوڑائی دونوں کو 2 سمر کم کیا جائے تو رقبہ میں 28 مربع سمر کی کمی واقع ہوتی ہے۔اگر لمبائی کو 1 سمر کم کیا جائے اور چوڑائی کو 2 سمر بڑھایا جائے تو رقبہ میں 33 مربع سمر کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس مستطیل کا رقبہ معلوم کیجئے۔

(vi) ایک ریل یکساں رفتار سے چل رہی ہے۔اگر ریل اپنی رفتار سے 6 km/hr تیز چلے تو اس کو منزل تک پہنچنے میں معمول وقت سے 4 گھنٹے کم لگیں گے۔ اگر ریل اپنی رفتار سے 6 km/hr آہستہ چلتی ہے تو اس کو پہنچنے کے لئے 6 گھنٹے زیادہ لگیں گے تو ریل سے طے کردہ فاصلہ معلوم کیجئے۔

3.3 دودرجی کثیر رقمیات

کسی n درجی کثیر رقمی جس میں متغیر x ہو $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ جس میں $a_0 \neq 0$ اور $a_1, a_2, a, ..., a_n$ حقیقی مستقل ہوں گے۔

ایک کثیر رقمی جس کا درجہ 2 ہے۔دودرجی کثیر رقمیات کہلاتی ہے اور اُسے عام طور پر اس طرح لکھتے ہیں $p(x) = ax^2 + bx + c$ جس میں $a \neq 0$ اور b اور c حقیقی مستقل ہیں۔حقیقی مستقل درجہ صفر درجہ کی کثیر رقمیات ہیں۔

مثال کے طور پر $x^2 + x + 1, 3x^2 - 1, -\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$ دودرجی کثیر رقمیات ہیں۔

دودرجی کثیر رقمیات کی قیمت $P(x) = ax^2 + bx + c$, میں $P(x)$ میں k کو x کی جگہ بدلنے پر حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا $x = k$ میں $p(x)$ کی قیمت $P(k) = ak^2 + bk + c$ ہوگی۔

3.3.1 کثیر رقمیات کے صفر : Zeros of a plynomial

فرض کریں کہ $P(x)$ ایک کثیر رقمی ہے۔اگر k ایک حقیقی عدد اس طرح ہے کہ $P(k) = 0$ تو k، کثیر رقمی $P(x)$ کا صفر کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کثیر رقمیات کا صفر $q(x) = x^2 - 5x + 6$ ، 2 اور 3 ہے۔اسلئے $q(3) = 0$ اور $q(2) = 0$

برائے ذہن نشینی

کثیر رقمیات کے حقیقی عدد میں کوئی صفر نہیں ہوتا ہے۔مثال کے طور پر $P(x) = x^2 + 1$ حقیقی عدد ہے اس میں صفر نہیں ہے۔ جیسا کہ یہاں حقیقی عدد k نہیں ہے۔$P(k) = 0$ ۔ ہندسوی طور پر کثیر رقمیات کا صفر کچھ نہیں بلکہ کثیر رقمیات کی ترسیم میں نقطہ تقاطع کا x- محدد ہے۔ اور اگر وہ قطع کرتا ہو تو وہ x محور ہے۔

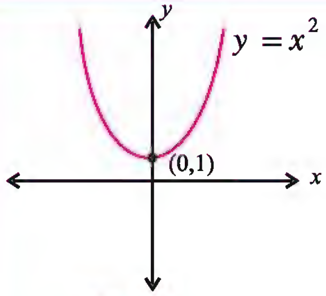


Fig 3.1

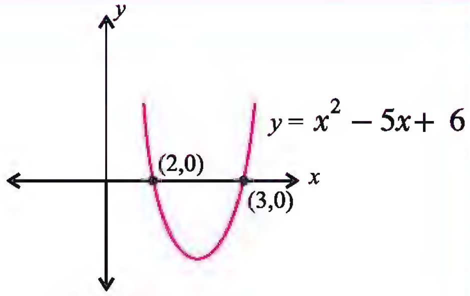


Fig. 3.2

3.3.2 دودرجی مساوات کے صفر اور سر عددوں کے درمیان تعلق :

عام طور پر اگر α اور β دودرجی کثیر رقمیات کے صفر ہوں تو $a \neq 0$ $p(x) = ax^2 + bx + c$, ۔تو مسلۂ جزوِ ضربی کے طریقے سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

، $P(x)$ کے جزوِ ضربی $(x - \alpha)$ اور $(x - \beta)$ ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$$ جسمیں k ایک غیر صفری مستقل ہے۔

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

x^2 ، x کے سر اعداد اور مستقل رقم دونوں طرف کے موازنہ کرتے ہوئے، ہمیں حاصل ہے۔

$a = k,\ b = -k(\alpha + \beta)$ اور $c = k\alpha\beta$

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ کے صفر اور سر اعداد کا بنیادی تعلق اس طرح ہے۔
>
> صفر کا حاصل جمع
> $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ کا ضریب}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$
>
> صفر کا حاصلِ ضرب
> $$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

مثال 3.11 دو درجی کثیر رقمی $x^2 + 9x + 20$ کے صفر معلوم کیجئے۔ صفر اور ضریب کے درمیان بُنیادی تعلق کی تصدیق کیجئے۔

حل : فرض کیجئے $P(x) = x^2 + 9x + 20 = (x+4)\ (x+5)$

لہٰذا $P(x) = 0 \Rightarrow (x+4)\ (x+5) = 0$ $\therefore\ x = -4$ یا $x = -5$

$p(-4) = (-4+4)\ (-4+5) = 0$ اور $p(-5) = (-5+4)(-5+5) = 0$

لہٰذا -5 اور -4 $P(x)$ کے صفر ہیں۔

صفر کا حاصل جمع $= -9$

صفر کا حاصلِ ضرب $= 20$ (1)

بُنیادی تعلق کے حساب سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

صفر کا حاصل جمع $= -\dfrac{x \text{ کا ضریب}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = -\dfrac{9}{1} = -9$ (2)

صفر کا حاصلِ ضرب $= \dfrac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \dfrac{20}{1} = 20$ (3)

لہٰذا بُنیادی تعلق کی جانچ کی گئی۔

برائے ذہن نشینی

$x^2 + 9x + 20$

کے جزوِ ضربی حاصل کرنے کے لئے

20

4 5 $\because 4+5=9,\ 4\times5=20$

$\frac{4}{1}$ $\frac{5}{1}$ مستقل رقم

x^2 کا ضریب

$(x+4)\ (x+5).$

غور کریں

> دو درجی کثیر قمیات $P(x) = ax^2 + bx + c$ زیادہ سے زیادہ دو صفر رکھتے ہیں۔ اب کسی بھی $a \neq 0$ کیلئے $a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)$ صفر α اور β کے ساتھ ایک کثیر رقمی ہے۔ چنانچہ ہم a کا کوئی غیر صفر منتخب کر سکتے ہیں۔ تو اُسمیں صفر α اور β کیلئے لامتناہی دو درجی کثیر قمیات حاصل ہوں گے۔

مثال 3.12

ایک دو درجی کثیر رقمی معلوم کرو جس کے صفر کا حاصل جمع اور حاصلِ ضرب بالترتیب -4 اور 3 ہے۔ تو دو درجی کثیر قمیات معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے α اور β دو درجی کثیر قمیات کے صفر ہیں۔ یعنی

$$\alpha + \beta = -4\ ,\ \alpha\beta = 3$$

اس طرح کی ایک کثیر رقمی $P(x) = x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta$

$$= x^2 - (-4)\, x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

مثال 3.13 $x = \frac{1}{4}$ اور $x = -1$ صفروں کے لئے ایک دودرجی کثیررقمی معلوم کیجئے۔

حل : فرض کریں کہ $p(x)$ کے صفر α اور β ہیں۔

صفراورسراعداد کاتعلق استعمال کرتے ہوئے

$$p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta$$

$$= x^2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)(-1)$$

$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

یہی $x = \frac{1}{4}$ اور $x = -1$ صفروں والی ایک دودرجی کثیررقمی ہے۔

دوسراطریقہ

درکار کثیررقمی کو بالراست اس طرح سے بھی حاصل کرسکتے ہیں۔

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 1)$$

$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

کسی بھی مطلوبہ خصوصیت والی کثیررقمی کو حاصل کرنے کے لئے $p(x)$ کو کسی بھی غیرصفری حقیقی عدد سے ضرب دیں۔

> **غورکریں**
>
> $4x^2 + 3x - 1$ بھی ایک کثیررقمی ہے جس کے صفر $\frac{1}{4}$ اور -1 ہیں

مشق 3.3

1) نیچے دی گئی کثیررقمیات کے صفر معلوم کیجئے اور صفراورسراعداد کے تعلق کو جانچئے۔

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$ (iv) $4x^2 + 8x$

(v) $x^2 - 15$ (vi) $3x^2 - 5x + 2$ (vii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ (viii) $x^2 + 2x - 143$

2) درج ذیل اعداد میں ہرایک کے صفر کے حاصل جمع اور حاصل ضرب معلوم کیجئے اوران کے کثیررقمی حاصل کیجئے۔

(i) $3, 1$ (ii) $2, 4$ (iii) $0, 4$ (iv) $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$

(v) $\frac{1}{3}, 1$ (vi) $\frac{1}{2}, -4$ (vii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (viii) $\sqrt{3}, 2$

3.4 ترکیبی تقسیم (Synthetic division)

ہمیں معلوم ہے کہ جب 29 کو 7 سے تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں خارج قسمت 4 اورباقی 1 حاصل ہوتا ہے۔ $29 = 4(7) + 1$
اسی طرح کسی بھی کثیررقمی $p(x)$ کوایک اور کثیررقمی $q(x)$ سے تقسیم کریں تو ہمیں اسطرح خارج قسمت اورباقی حاصل ہوتا ہے۔

$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ جس میں ؛ $p(x) =$ (خارج قسمت) $q(x) +$ باقی

یعنی یہاں $q(x)$ درجہ $< r(x)$ درجہ اسکو تقسیمی الگارتم (Division algorithm) کہتے ہیں۔

اگر $q(x) = x + a$ تب $r(x) = 0$ درجہ ؛ لہٰذا $r(x)$ مستقل ہے۔

لہٰذا $p(x) = s(x)(x + a) + r$ جہاں r مستقل ہے۔

اگر ہم اوپر کی مساوات میں $x = -a$ درج کریں تو $p(-a) = s(-a)(-a + a) + r \Rightarrow r = p(-a)$

اوراگر $q(x) = x + a$ ہو تو باقی کو $p(x)$, سادہ طریقے سے $x = -a$ پر حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

تقسیمی الگارتم : اگر $p(x)$ مقسوم ہے اور $q(x)$ مقسوم علیہ ہے تو تقسیمی الگارتم کے لحاظ سے ہمیں اسطرح لکھیں گے۔

$p(x) = s(x)\,q(x) + r(x)$ اب ہم مندرجہ ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

(i) اگر $q(x)$ **خطی** مساوات ہے تو $r(x) = r$ **مستقل** ہے۔

(ii) اگر $q(x) = 1$ درجہ (تو $q(x)$ خطی ہے) تو $p(x) = 1 + \deg s(x)$

(iii) اگر $P(x)$ کو $(x + a)$ سے تقسیم کرتے ہیں تو بچت $p(-a)$ ہے۔

(iv) اگر $r = 0$ ہو تو ہم کہیں گے کہ ، $p(x)$ کو $q(x)$ تقسیم کرتا ہے۔یا , $p(x)$ کا اجزائے ضربی $q(x)$ کے برابر ہے۔

برائے ذہن نشینی

ایک کثیر رقمی سے ایک خطی کثیر رقمی کی تقسیم کے طریقے کو 1809ء میں **پاؤلو رُوفن** نے تعارف کروایا۔ اس طریقے کو **ترکیبی تقسیم** کہتے ہیں۔ان کے سراعداد کی مدد سے ایک کثیر رقمی سے ایک خطی کثیر رقمی کی تقسیم آسان ہوگئی۔

پاؤلو روفن ، اٹلی (1765 - 1822)

ترکیبی تقسیم کے طریقے کو ایک مثال کے ذریعہ سمجھیں گے۔

فرض کریں کہ $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ مقسوم ہے۔اور $q(x) = x + 2$ مقسوم علیہ ہے۔

ہم نیچے دیئے گئے طریقے سے $s(x)$ خارج قسمت اور بچت r معلوم کرسکتے ہیں۔

$x^3 + 2x^2 - x - 4$

$1 \quad 2 \quad -1 \quad 4$

مرحلہ (1) مقسوم اور مقسوم علیہ کو x کے قوتوں کی نزولی ترتیب میں لکھتے ہیں۔اگر درمیان میں x کی کوئی رقم نہیں دی گئی ہو تو اُسے '0' لکھتے ہیں۔سراعداد کو پہلی صف سے تقسیم کرتے ہوئے لکھتے ہیں۔(خاکہ دیکھیں)

مرحلہ (2) مقسوم علیہ کے صفر کو معلوم کیجئے۔

مرحلہ (3) دوسرے صف میں پہلے عدد کے نیچے صفر ڈالنا چاہیئے۔دوسرے صف اور تیسرے صف کیلئے نیچے دیئے گئے طریقے سے مکمل کیجئے۔

-2	1	2	-1	-4
	0	$\xrightarrow{1\times(-2)}$ -2	$\xrightarrow{0\times(-2)}$ 0	$\xrightarrow{-1\times(-2)}$ 2
	$1+0$ $=1$	$2+(-2)$ $=0$	$-1+0$ $=-1$	$-4+2$ $=-2$ ⟵ باقی یا بچت

مرحلہ (4) خارج قسمت اور بچت کو نیچے لکھئے۔سب اعداد صرف تیسرے صف کے آخری عدد کے خارج قسمت کے سراعداد ہیں۔

لہٰذا خارج قسمت $x^2 - 1$ اور بچت -2 ہے۔

مثال 3.14 $x^3 + x^2 - 7x - 3$ کو $x - 3$ سے تقسیم کرکے خارج قسمت اور باقی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کرو کہ $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$ ہے۔ مقسوم علیہ کا صفر 3 ہے، چنانچہ ہمیں فرض کرتے ہیں کہ

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 1 & -7 & -3 \\ & 0 & 3 & 12 & 15 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & \boxed{12} \end{array} \longrightarrow \text{بچت}$$

جب $p(x)$ کو $(x - 3)$ سے تقسیم کرتے ہیں تو خارج قسمت $x^2 + 4x + 5$ اور بچت 12 ہے۔

مثال 3.15 اگر $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ کو $(2x + 1)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $x^3 + ax^2 - bx - 6$ ہو تو a اور b کی قیمتیں اور بچت معلوم کیجیے۔

حل : فرض کرو کہ $p(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$

دیا گیا ہے کہ مقسوم علیہ $2x + 1$ ہے۔ $2x + 1 = 0$ لکھتے ہیں، تب $x = -½$ ہے۔

مقسوم علیہ کا صفر $x = -\frac{1}{2}$ ہے۔

$$\begin{array}{c|ccccc} -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -14 & -19 & 6 \\ & 0 & -1 & 0 & 7 & 6 \\ \hline & 2 & 0 & -14 & -12 & \boxed{12} \end{array} \longrightarrow \text{باقی}$$

$$2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\{2x^3 - 14x - 12\} + 12$$

$$= (2x + 1)\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) + 12$$

$= ½(2x^3 - 14x - 12) = x^3 - 7x - 6$ چنانچہ خارج قسمت $x^3 - 7x - 6$ ہے۔ اور باقی 12 ہے۔

مگر خارج قسمت دیا گیا ہے۔ $x^3 + ax^2 - bx - 6$

حاصل شدہ خارج قسمت کے ساتھ موازنہ کرنے پر ہمیں $a = 0 , b = 7$ اور باقی 12 حاصل ہوتا ہے۔

مشق 3.4

1. ترکیبی تقسیم کے استعمال سے خارج قسمت اور بچت معلوم کیجیے۔

(i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$

(iii) $(3x^3 + 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$ (iv) $(3x^3 - 4x^2 - 5) \div (3x + 1)$

(v) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (vi) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$

2. اگر $(x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29)$ کو $(x + 4)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $(x^3 - ax^2 + bx + 6)$ ہو تو a , b معلوم کیجیے اور بچت بھی معلوم کیجیے۔

3. اگر $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 7)$ کو $(2x + 1)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $(4x^3 + px^2 - qx + 3)$ ہو تو p , q معلوم کیجیے اور بچت بھی معلوم کیجیے۔

3.4.1 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے اجزائے ضربی دریافت کرنا :

ہم نویں جماعت میں پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ کسی طرح دو درجی کثیر رقمیات کے اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔اس حصے میں آیئے ہم سیکھیں کہ کس طرح ترکیبی تقسیم کے استعمال سے مکعب کثیر رقمی کے اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر ہم مکعب کثیر رقمی $p(x)$ کا ایک خطی جُز پہچانتے ہیں۔تو ترکیبی تقسیم کے استعمال سے ہم $p(x)$ کا ایک دو درجی جز حاصل کرتے ہیں۔مزید اور ممکن ہو تو دو درجی جز کے دو خطی جز معلوم کر سکتے ہیں۔چنانچہ اگر ایک مکعب کثیر رقمی کے اگر اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں تو ترکیبی تقسیم کا طریقہ خطی جُز معلوم کرنے میں مددگار ہے۔

غور کریں

(i) کسی بھی کثیر رقمی $p(x)$ کے لئے $x = a$ ، صفر ہے اگر اور صرف اگر $p(a) = 0$ ہے۔

(ii) $p(x)$ کا ایک جزوِضربی $(x - a)$ ہے۔اگر اور صرف اگر $p(a) = 0$ ہے۔ (مسئلہ جزوِضربی)

(iii) $p(x)$ کا ایک جزوِضربی $(x - 1)$ ہے۔اگر اور صرف اگر $p(x)$ کے سر اعداد کا حاصلِ جمع صفر ہے۔

(iv) $p(x)$ کا ایک جزوِضربی $(x + 1)$ ہے۔اگر اور صرف اگر x کی جفت قوتوں کے ضریبوں یا سر اعداد کا حاصل جمع مستقل کے ساتھ، x کی طاق قوتوں کے ضریبوں کے مساوی ہے۔

مثال 3.16 (i) ثابت کرو کہ $(x - 1)$ ، $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ کا ایک جزوِضربی ہے۔

(ii) ثابت کرو کہ $(x + 1)$ ، $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ کا ایک جزوِضربی ہے۔

حل : (i) فرض کرو کہ
$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
(غور کریں کہ سر اعداد کا حاصل جمع صفر ہے)
$$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$
چنانچہ $P(x)$ کا ایک جزوِضربی $(x - 1)$ ہے۔

(ii) فرض کرو کہ
$$q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$
چنانچہ $q(x)$ کا جزوِضربی $(x + 1)$ ہے ؛ $q(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$

مثال 3.17 $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ کے خطی اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کرو کہ
$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$
غور کیجیے کہ ضریبوں کا جمع صفر نہیں ہے۔ $p(1) = -2 \neq 0$

$\therefore$ $x - 1$ ، $p(x)$ کا جزوِضربی نہیں ہے۔

غرض $p(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 0$

اس لئے $(x + 1)$، $p(x)$ کا ایک جزوِضربی ہے۔

ہم دوسرے اجزائے ضربی معلوم کرنے کیلئے ترکیبی تقسیم استعمال کریں گے۔

-1	2	-3	-3	2
	0	-2	5	-2
	2	-5	2	0 ⟶ باقی

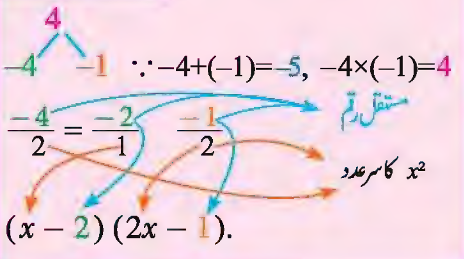
چنانچہ $p(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$

اب $2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$

اسلئے $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x - 2)(2x - 1)$

برائے ذہن نشینی

$2x^2 - 5x + 2$ کے اجزائے ضربی حاصل کرنے کے لئے ہم اس طرح کریں گے۔



مثال 3.18 اجزائے ضربی دریافت کیجئے۔ $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

حل : فرض کرو کہ $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

یعنی کہ $p(-1) \neq 0$ اور $p(1) \neq 0$ اس لئے نہ $(x+1)$ اورنہ $(x-1)$، $p(x)$ کے جزوِ ضربی نہیں۔

اس لئے (Trail and error) طریقے سے x کی مختلف قیمتیں ڈھونڈ سکتے ہیں۔ جب $x = 2$, $p(2) = 0$ ہے۔

چنانچہ $(x-2)$ ، $p(x)$ کا ایک جزوِ ضربی ہے۔

دوسرے اجزائے ضربی دریافت کرنے کیلئے آیئے ہم ترکیبی تقسیم استعمال کریں۔

$$\begin{array}{c|cccc|l} 2 & 1 & -3 & -10 & 24 & \\ & 0 & 2 & -2 & -24 & \\ \hline & 1 & -1 & -12 & \boxed{0} & \longrightarrow \text{باقی} \end{array}$$

$\therefore$ $x^2 - x - 12 =$ دوسر اجزائے ضربی ہے

اب $x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = (x-4)(x+3)$

چنانچہ $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x+3)(x-4)$

مشق 3.5

1. ذیل کے کثیر رقمیات کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	(ii) $4x^3 - 7x + 3$	(iii) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$
(iv) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$	(v) $x^3 - 7x + 6$	(vi) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$
(vii) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$	(viii) $x^3 - 5x + 4$	(ix) $x^3 - 10x^2 - x + 10$
(x) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$	(xi) $x^3 + x^2 + x - 14$	(xii) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

3.5 مشترک مقسوم علیہ اعظم (م.ع.ا) (G.C.D) اور ذواضعاف اقل (ذ.ا.ا) (L.C.M)

3.5.1۔ مشترک مقسوم علیہ اعظم (G.C.D)

دو یا دو سے زیادہ الجبرائی جملوں کے مشترک جزوِ اعظم یا مقسوم علیہ اعظم کے سب سے بڑے درجے کا جملہ ہے۔ جو ہر ایک کو بغیر بچت کے تقسیم کرتا ہے۔

سادہ جملوں پر غور کیجئے۔

(i) a^4 , a^3 , a^5 , a^6 (ii) $a^3 b^4 , ab^5 c^2 , a^2 b^7 c$

(i) میں غور کرو کہ a , a^2 , a^3 تمام جملوں کے مقسوم علیہ ہیں۔ ان میں a^3 سب سے بڑی قوت کا مقسوم علیہ ہے۔

اسلئے a^3، a^4 , a^3 , a^5 , a^6 جملوں کا G.C.D ہے۔

(ii) میں اسی طرح ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ

ab^4 , G.C.D ہے۔ $a^3b^4 , ab^5 c^2 , a^2 b^7c$ کا۔

اگر جملوں کے عددی ضریب ہوتو اُن کے مشترک جزوِضربی دریافت کیجئے۔اور اس کو الجبرائی جملوں کے مشترک مقسوم علیہ اعظم کی ضریب کی طرح آگے لکھئے۔ آیئے ہم مشترک مقسوم علیہ اعظم کو سمجھنے کیلئے چند اور مثالوں پر غور کریں۔

مثال 3.19 مندرجۂ ذیل کے G.C.D دریافت کیجئے۔

$$\text{(i) } 90, 150, 225 \qquad \text{(ii) } 15x^4y^3z^5,\ 12x^2y^7z^2$$

$$\text{(iii) } 6(2x^2-3x-2),\ 8(4x^2+4x+1),\ 12(2x^2+7x+3)$$

حل : (i) آیئے ہم اعداد 90، 150، 225 کو ان کے ابتدائی اجزائے ضربی کے طور پر لکھئے۔

$90 = 2\times3\times3\times5$، $150 = 2\times3\times5\times5$ اور $225 = 3\times3\times5\times5$

اوپر سے 13 , 5 دیئے ہوئے تمام اعداد کے مشترک عددِ اولیٰ ہیں۔چنانچہ $\text{G.C.D} = 3\times5 = 15$

(ii) اسی طرح سے ہم الجبرائی جملوں کے G.C.D دریافت کرنے کیلئے اس طریقے کو استعمال کرسکتے ہیں۔

اب دیئے گئے جملے $15x^4y^3z^5$ اور $12x^2y^7z^2$ کو لیں۔

یہاں دیئے گئے جملوں میں مشترک مقسوم علیہ $3, x^2, y^3$ اور z^2 ہیں۔

اس لئے $\text{G.C.D} = 3\times x^2\times y^3\times z^2 = 3x^2y^3z^2$

(iii) دیئے گئے جملے $6(2x^2-3x-2)$, $8(4x^2+4x+1)$, $12(2x^2+7x+3)$

$6, 8, 12$ کا G.C.D 2 ہے۔

پھر ہم دو درجی جملوں کے اجزائے ضربی دریافت کریں۔

$$2x^2-3x-2 = (2x+1)(x-2)$$
$$4x^2+4x+1 = (2x+1)(2x+1)$$
$$2x^2+7x+3 = (2x+1)(x+3)$$

اوپر کے دو درجی جملوں کا مشترک جزوِضربی $(2x+1)$ ہے اسلئے

$$\text{G.C.D} = 2(2x+1)$$

3.5.2 الگارتم کے استعمال سے کثیر رقمی جملوں کے مشترک مقسوم علیہ اعظم

آیئے ہم سادہ طریقے سے 924 اور 105 کا G.C.D دریافت کریں۔

$$924 = 8\times105+84$$
$$105 = 1\times84+21$$
$$84 = 4\times21+0$$

یا

$$105\,\overline{\smash{)}\,924}\,\,8 \qquad 84\,\overline{\smash{)}\,105}\,\,1 \qquad 21\,\overline{\smash{)}\,84}\,\,4$$

105	924 (8)	84	105 (1)	21	84 (4)
	840		84		84
	84		21		0

924 اور 105 کا G.C.D 21 ہے۔

اس طرح کی تکنیک کثیر رقمیات میں استعمال کرسکتے ہیں۔جب ان کے GCD ہو۔

فرض کروکہ $f(x)$ اور $g(x)$ دو غیر مستقل کثیر رقمیات جن کے درجے $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ ہیں۔

ہم $f(x)$ اور $g(x)$ کے خطی اجزائے ضربی غیر مختصر دو درجی کثیر رقمیات کے طور پر معلوم کرسکتے ہیں۔تو ہم اوپر سیکھے ہوئے طریقے سے آسانی کے ساتھ GCD دریافت کرسکتے ہیں۔اگر کثیر رقمیات $f(x)$ اور $g(x)$ کے جزوِضربی آسانی سے نہیں معلوم کرسکتے ہیں تو وہ ایک مشکل مسئلہ ہوگا۔

غرض GCD دریافت کرنے کیلئے منتظم طریقے دیئے گئے ہیں۔

مرحلہ (1) پہلے $f(x)$ کو $g(x)$ سے تقسیم کریں تو ہمیں یہ حاصل ہوگا۔

$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$ جہاں $q(x)$ خارج قسمت اور $r(x)$ بچت ہے اس لئے $\deg(g(x) > \deg(r(x)$

اگر $r(x)$ بچت '0' ہے تو $f(x)$ اور $g(x)$ کا GCD , $g(x)$ ہے۔

مرحلہ (2) اگر بچت $r(x)$ غیر صفر ہو تو $g(x)$ کو $r(x)$ سے تقسیم کریں تاکہ $g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$ حاصل ہو۔

یہاں $r_1(x)$ باقی ہے۔اسلئے $\deg r(x) > \deg r_1(x)$ ہے۔ اگر بچت $r_1(x)$ صفر ہے تو $r(x)$ مطلوبہ GCD ہے۔

مرحلہ (3) اگر $r_1(x)$ ایک غیر صفر ہے تو اسی طرح تقسیم کو جاری رکھیں۔ جب تک باقی صفر حاصل ہو۔آخری منزل کے پہلے جو باقی حاصل ہوگا۔وہ $f(x)$ اور $g(x)$ کا GCD ہے۔

ہم $f(x)$ اور $g(x)$ کے کثیر رقمیات کے GCD کو $(f(x), g(x))$ کو GCD کے طور پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

برائے ذہن نشینی

اقلیدس کے تقسیمی الگارتم کے قانون کی بنیاد اس طرح ہے کہ اگر چھوٹے عدد کو بڑے عدد سے تفریق کیا جاتا ہے تو دو اعداد کے GCD چنانچہ بدل نہیں سکتے

GCD (252, 105) = GCD (147,105) = GCD (42,105) = GCD (63,42) = GCD (21,42) = 21

مثال 3.20 کثیر رقمی $x^4 + 3x^3 - x - 3$ اور $x^3 + x^2 - 5x + 3$ کا GCD معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$ اور $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

یہاں $\deg f(x) > \deg g(x)$ $\quad x^3 + x^2 - 5x + 3$ مقسوم علیہ $\therefore$

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \cline{2-2} x^3+x^2-5x+3 & x^4+3x^3+0x^2-x-3 \\ & x^4+x^3-5x^2+3x \\ \cline{2-2} & \quad 2x^3+5x^2-4x-3 \\ & \quad 2x^3+2x^2-10x+6 \\ \cline{2-2} & \qquad 3x^2+6x-9 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 \rightarrow$ باقی $(\neq 0)$

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \cline{2-2} x^2+2x-3 & x^3+x^2-5x+3 \\ & x^3+2x^2-3x \\ \cline{2-2} & \quad -x^2-2x+3 \\ & \quad -x^2-2x+3 \\ \cline{2-2} & \qquad 0 \end{array}$$

$0 \rightarrow$ باقی

$$\text{GCD}\,(f(x), g(x)) = x^2 + 2x - 3$$

برائے ذہن نشینی

اگر دو اصلی جملوں میں سادہ اجزاء (مستقل) موجود نہ ہوں تو ان کے GCD نہیں ہو سکتے۔اس لئے اوپر کی مثال میں سادہ اجزائے ضربی $3x^2 + 6x - 9$ سے 3 نکال دیتے ہیں اور $x^2 + 2x - 3$ نئے مقسوم علیہ لیتے ہیں۔

مثال 3.21

نیچے دیئے ہوئے کثیر رقمی کا GCD معلوم کیجئے۔

$3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$ اور $4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x$

حل : فرض کرو کہ $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x = 3x\,(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$

فرض کرو کہ $g(x) = 4x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 8x = 2x\,(2x^3 + 7x^2 - 4x - 4)$

کثیر رقمی $(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$ اور $(2x^3 + 7x^2 + 4x - 4)$ کا GCD معلوم کیجئے۔

ہمیں کثیر رقمی $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ کو مقسوم علیہ کہنا چاہئے۔

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \;\big)\; 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \;\big(\; 2$$
$$2x^3 + 4x^2 - 8x - 16$$
$$3x^2 + 12x + 12$$
$$(x^2 + 4x + 4)$$
باقی $\neq 0$

$$x^2 + 4x + 4 \;\big)\; x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \;\big(\; x - 2$$
$$x^3 + 4x^2 + 4x$$
$$-2x^2 - 8x - 8$$
$$-2x^2 - 8x - 8$$
باقی $\rightarrow 0$

$3x$ اور $2x$ کا مشترک جزوِ ضربی x ہے۔

$$\text{GCD}\,(f(x)\,,\;g(x)) = x\,(x^2 + 4x + 4)$$

مشق 3.6

(1) G.C.D (م.ع.ا) معلوم کیجئے۔

(i) $7x^2yz^4\,,\;21x^2y^5z^3$

(ii) $x^2y\,,\;x^3y\,,\;x^2y^2$

(iii) $25bc^4d^3\,,\;35b^2c^5\,,\;45c^3d$

(iv) $35x^5y^3z^4\,,\;49x^2yz^3\,,\;14xy^2z^2$

(2) نیچے دئے ہوئے کثیر رقمی کا GCD معلوم کیجئے۔

(i) $c^2 - d^2\,,\;c\,(c - d)$

(ii) $x^4 - 27a^3x\,,\;(x - 3a)^2$

(iii) $m^2 - 3m - 18,\; m^2 + 5m + 6$

(iv) $x^2 + 14x + 33,\; x^3 + 10x^2 - 11x$

(v) $x^2 + 3xy + 2y^2\,,\;x^2 + 5xy + 6y^2$

(vi) $2x^2 - x - 1,\; 4x^2 + 8x + 3$

(vii) $x^2 - x - 2,\; x^2 + x - 6,\; 3x^2 - 13x + 14$

(viii) $x^3 - x^2 + x - 1,\; x^4 - 1$

(ix) $24(6x^4 - x^3 - 2x^2)\,,\;20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$

(x) $(a - 1)^5\,(a + 3)^2\,,\;(a - 2)^2\,(a - 1)^3\,(a + 3)^4$

(3) تقسیمی الگارتم استعمال کر کے کثیر رقمی جوڑیوں کا GCD معلوم کیجئے۔

(i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\; 4x^2 - 16x + 12$

(ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18,\; 3x^2 + 13x + 10$

(iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\; 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

(iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12,\; x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

3.5.3 مشترک ذو اضعاف اقل : Least Common Multiple (L.C.M)

دو یا دو سے زیادہ جملوں کے ذو اضعاف اقل سب سے کم درجے کا جملہ ہے۔ جو ہر ایک عدد سے بغیر باقی کے تقسیم ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر فرض کرو کہ سادہ جملے $a^4\,,\;a^3\,,\;a^6 \;.\;.\;.\;.$

اب a^4, a^3, a^6 کے مشترک ذواضعاف اقل . . . . a^6, a^7, a^8 ہیں۔
مشترک ذواضعاف اقل a^6 ہے۔
چنانچہ a^4, a^3, a^6 کا LCM a^6 ہے۔
ایسے ہی $a^3 b^4$, ab^5, $a^2 b^7$ کا LCM $a^3 b^7$ ہے۔
ہم تھوڑے اور زیادہ مثالوں کو استعمال کرتے ہوئے LCM معلوم کریں گے۔

مثال 3.22

نیچے دیے ہوئے کثیر رقمی کا LCM معلوم کیجئے۔

(i) 90, 150, 225 (ii) $35a^2 c^3 b, 42a^3 cb^2, 30ac^2 b^3$

(iii) $(a-1)^5 (a+3)^2, (a-2)^2 (a-1)^3 (a+3)^4$ (iv) $x^3+y^3, x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4$

حل :

(i) اب $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$

$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$

$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2$

LCM حاصلِ ضرب $= 2^1 \times 3^2 \times 5^2 = 450$ ہے۔

(ii) 35، 42، اور 30 کا LCM $5 \times 7 \times 6 = 210$ ہے۔

$\text{LCM} = 210 \times a^3 \times c^3 \times b^3 = 210\, a^3 c^3 b^3$

(iii) $(a-1)^5 (a+3)^2$ ، $(a-2)^2 (a-1)^3 (a+3)^4$ کا $\text{LCM} = (a-1)^5 (a+3)^4 (a-2)^2$ ہے۔

(iv) پہلے ہم دیے گئے ہر ایک جملہ کے لئے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$
$$\text{LCM} = (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6-y^6$$

مشق 3.7

مندرجۂ ذیل کا LCM معلوم کیجئے۔

1) x^3y^2, xyz
2) $3x^2yz, 4x^3y^3$
3) a^2bc, b^2ca, c^2ab
4) $66a^4b^2c^3, 44a^3b^4c^2, 24a^2b^3c^4$
5) $a^{m+1}, a^{m+2}, a^{m+3}$
6) x^2y+xy^2, x^2+xy
7) $3(a-1), 2(a-1)^2, (a^2-1)$
8) $2x^2-18y^2, 5x^2y+15xy^2, x^3+27y^3$
9) $(x+4)^2(x-3)^3, (x-1)(x+4)(x-3)^2$
10) $10(9x^2+6xy+y^2), 12(3x^2-5xy-2y^2), 14(6x^4+2x^3)$

3.5.4 LCM اور GCD کا درمیانی تعلق

ہم جانتے ہیں کہ دو مثبت سالم اعداد کا حاصل ضرب ان کے LCM اور GCD کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔ مثال کے طور پر $21 \times 35 = 105 \times 7$ یہاں $\text{LCM}(21, 35) = 105$ اور $\text{GCD}(21, 35) = 7$

اسی طریقے میں ہمیں ذیل کے نتیجے حاصل ہوئے۔

کوئی دو کثیر رقمیات کا حاصل ضرب ان کے LCM اور GCD کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔

$$f(x) \times g(x) = \text{LCM}(f(x), g(x)) \times \text{GCD}(f(x), g(x))$$

غرض اس نتیجے کو ایک مثال کے ساتھ اخذ کریں گے۔

فرض کرو کہ $f(x) = 12(x^4 - x^3)$ اور $g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ دو کثیر رقمیات ہیں۔

$$f(x) = 12(x^4 - x^3) = 2^2 \times 3 \times x^3 \times (x-1) \quad (1)$$

اور $$g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 2^3 \times x^2 \times (x-1) \times (x-2) \quad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا۔

$$\text{LCM}(f(x), (g(x)) = 2^3 \times 3^1 \times x^3 \times (x-1) \times (x-2) = 24x^3(x-1)(x-2)$$

$$\text{GCD}(f(x), g(x)) = 4x^2(x-1)$$

چنانچہ $$\text{LCM} \times \text{GCD} = 24x^3(x-1)(x-2) \times 4x^2(x-1)$$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \quad (3)$$

اور $$f(x) \times g(x) = 12x^3(x-1) \times 8x^2(x-1)(x-2)$$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \quad (4)$$

(3) اور (4) سے ہم اخذ کئے $\text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$

غرض دو کثیر رقمیات کے GCD اور LCM کا حاصل ضرب دو کثیر رقمیات کے حاصل ضرب کے برابر ہے اور بھی اگر $f(x), g(x)$، LCM اور GCD میں کوئی ایک دیا گیا ہو تو ہم دوسرا آسانی کے ساتھ معلوم کرسکتے ہیں۔ اس لئے کہ LCM اور GCD بے مثال (Unique) ہیں۔ سوائے -1 کے جزو ضربی کے لئے۔

مثال 3.23

$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ اور $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ کا GCD $x^2 + 5x + 7$ ہے LCM معلوم کیجئے۔

فرض کرو کہ $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ اور $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$

دیا ہوا $\text{GCD} = x^2 + 5x + 7$

ہمیں $\text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$

چنانچہ $$\text{LCM} = \frac{f(x) \times g(x)}{\text{GCD}} \quad (1)$$

اب GCD $f(x)$ اور $g(x)$ کو تقسیم کرتا ہے۔

فرض کرو کہ $f(x)$ تقسیم کرتا ہے GCD سے

	1	−2	8		
1 5 7	1	3	5	26	56
	1	5	7		
		−2	−2	26	
		−2	−10	−14	
			8	40	56
			8	40	56
			0		

جب $f(x)$ GCD کا تقسیم پذیر ہے تو ہمیں خارج قسمت $x^2 - 2x + 8$ حاصل ہوتا ہے۔

اب $\quad (1) \Rightarrow \text{LCM} = (x^2 - 2x + 8) \times g(x)$

چنانچہ $\quad \text{LCM} = (x^2 - 2x + 8)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28)$

غور کریں

اوپر کے مسئلہ میں ہم $g(x)$ کو GCD سے تقسیم کر سکتے ہیں اور خارج قسمت کو $f(x)$ سے ضرب کر سکتے ہیں۔ ہمیں مطلوبہ LCM حاصل ہوگا

مثال 3.24 $x + 1$ اور $x^6 - 1$ دو کثیر رقتی کا LCM اور GCD ہے۔ اگر ایک کثیر رقتی $x^3 + 1$ ہے تو دوسری کثیر رقتی معلوم کیجئے۔

حل : دیئے ہوئے

$$\text{LCM} = x^6 - 1 \quad \text{اور} \quad \text{GCD} = x + 1$$

فرض کرو کہ $\quad f(x) = x^3 + 1$

ہمیں معلوم ہے کہ $\quad \text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$

$$\Longrightarrow g(x) = \frac{\text{LCM} \times \text{GCD}}{f(x)} = \frac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1} = (x^3 - 1)(x + 1)$$

$$g(x) = (x^3 - 1)(x + 1).$$

مشق 3.8

1. مندرجۂ ذیل کثیر رقتی جوڑیوں کا LCM معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - 5x + 6,\ x^2 + 4x - 12$ جس کا GCD $x - 2$ ہے

(ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3,\ x^4 + 2x^2 + x + 2$ جس کا GCD $x^2 + x + 1$ ہے

(iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35,\ x^3 + 8x^2 + 4x - 21$ جس کا GCD $x + 7$ ہے

(iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5,\ 2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$ جس کا GCD $2x - 1$ ہے

2۔ $p(x)$ کے LCM اور GCD دیئے گئے ہیں۔ ان کے دیگر کثیر رقمیات $q(x)$ معلوم کیجئے۔

(i) $(x + 1)^2 (x + 2)^2,\ (x + 1)(x + 2),\ (x + 1)^2 (x + 2)$

(ii) $(4x + 5)^3 (3x - 7)^3,\ (4x + 5)(3x - 7)^2,\ (4x + 5)^3 (3x - 7)^2$

(iii) $(x^4 - y^4)(x^4 + x^2 y^2 + y^4),\ x^2 - y^2,\ x^4 - y^4$

(iv) $(x^3 - 4x)(5x + 1),\ (5x^2 + x),\ (5x^3 - 9x^2 - 2x)$

(v) $(x - 1)(x - 2)(x^2 - 3x + 3),\ (x - 1),\ (x^3 - 4x^2 + 6x - 3)$

(vi) $2(x + 1)(x^2 - 4),\ (x + 1),\ (x + 1)(x - 2)$

3.6 ناطق جملے (Rational Expression)

ناطق عدد کو خارج قسمت $\frac{m}{n}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ m اور $n \neq 0$ دو سالم اعداد ہیں۔ اسی طرح ناطق جملے کا خارج قسمت $\frac{p(x)}{q(x)}$ ہیں۔ $p(x)$ اور $q(x)$ دو کثیر رقمیات ہیں۔ اسمیں $q(x)$ غیر صفری کثیر رقمی ہے۔

ہر کثیر رقمی $p(x)$ ایک ناطق جملہ ہے جب تک $p(x)$ کو $\frac{p(x)}{1}$ کے طور پر لکھیں گے اسمیں '1' مستقل کثیر رقمی ہے۔

چنانچہ ناطق جملوں کا کثیر رقمی ہونا ضروری نہیں ہے۔ مثال کے طور پر $\frac{x}{x^2+1}$ ناطق جملہ ہے مگر کثیر رقمی نہیں ہے۔

ناطق جملوں کی چند مثالیں یہ ہیں۔ $2x+7$, $\frac{3x+2}{x^2+x+1}$, $\frac{x^3+\sqrt{2x}+5}{x^2+x-\sqrt{3}}$

3.6.1 ناطق جملوں کی مختصر ترین صورت (Rational Expressions in Lowest Form)

اگر دو کثیر رقمی $p(x)$ اور $q(x)$ کے سر اعداد اس طرح کے سالم اعداد ہوں کہ $p(x)$ اور $q(x)$ کا GCD '1' ہے۔ تو ہم کہیں گے کہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کا مختصر ترین ناطق جملہ ہے۔

اگر ناطق جملہ مختصر انداز میں نہیں ہے تو ہم اس کو مختصر کر سکتے ہیں۔ دونوں نسب نما $p(x)$ اور شمار کنندہ $q(x)$ کو $p(x)$ اور $q(x)$ کے GCD سے تقسیم کرتے ہیں۔ آیئے چند مثالوں پر غور کریں۔

مثال 3.25

ناطق جملے کو مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$

(iii) $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

حل :

(i) $$\frac{5x+20}{7x+28} = \frac{5(x+4)}{7(x+4)} = \frac{5}{7}$$

(ii) $$\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4} = \frac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)} = \frac{x-5}{x(2x+3)}$$

(iii) فرض کرو کہ $p(x) = 6x^2 - 5x + 1 = (2x-1)(3x-1)$ اور

$$q(x) = 9x^2 + 12x - 5 = (3x+5)(3x-1)$$

لہٰذا $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$$

(iv) فرض کرو کہ $f(x) = (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-1)(x-4)$ اور

$$g(x) = (x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x-3)(x+1)$$

لہٰذا $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$$

مشق 3.9

I۔ مندرجہ ذیل کو مختصر کیجئے۔

(i) $\dfrac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (اشارہ $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$)

(vi) $\dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\dfrac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\dfrac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\dfrac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\dfrac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

3.6.2 ناطق جملے کی ضرب اور تقسیم :

اگر $\dfrac{g(x)}{h(x)};\ h(x)\neq 0$ اور $\dfrac{p(x)}{q(x)};\ q(x)\neq 0$ دو ناطق جملے ہیں۔ تب

(i) ان کا حاصل ضرب $\dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{p(x)\times g(x)}{q(x)\times h(x)}$ ہے

(ii) ان کی تقسیم $\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{h(x)}{g(x)}$

$\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{p(x)\times h(x)}{q(x)\times g(x)}$ ہے

مثال 3.26 ضرب دیجئے۔

(i) $\dfrac{x^3y^2}{9z^4}$ سے $\dfrac{27z^5}{x^4y^2}$ (ii) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ سے $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ (iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ سے $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$

حل :

(i) اب $\dfrac{x^3y^2}{9z^4}\times\dfrac{27z^5}{x^4y^2} = \dfrac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)} = \dfrac{3z}{x}.$

(ii) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}\times\dfrac{a^2-b^2}{a-b} = \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)}\times\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} = a^2-ab+b^2$

(iii) اب $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4} = \dfrac{x^3-2^3}{x^2-2^2}\times\dfrac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4} = x+4.$$

مثال 3.27 تقسیم کیجئے۔

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1}$ سے $\dfrac{x-1}{x+1}$ (ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3}$ سے $\dfrac{x^2+x+1}{3x+9}$ (iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25}$ سے $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$

حل:

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1} \div \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \times \dfrac{(x+1)}{(x-1)} = \dfrac{4}{x-1}.$

(ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3} \div \dfrac{x^2+x+1}{3x+9} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3} \times \dfrac{3(x+3)}{x^2+x+1} = 3(x-1).$

(iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25} \div \dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)} \times \dfrac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$

$= \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}.$

مشق 3.10

1) مندرجہ ذیل کو ضرب دیجیے جواب مختصر ترین ہو۔

(i) $\dfrac{x^2-2x}{x+2} \times \dfrac{3x+6}{x-2}$

(ii) $\dfrac{x^2-81}{x^2-4} \times \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-x-20} \times \dfrac{x^2-2x+4}{x^3+8}$

(iv) $\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+2} \times \dfrac{x^2-4}{x^3+64} \times \dfrac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2} \times \dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$

(vi) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4} \times \dfrac{x^4-8x}{2x^2+5x-3} \times \dfrac{x+3}{x^2-2x}$

2) مندرجہ ذیل کو تقسیم کیجیے جواب مختصر ہو۔

(i) $\dfrac{x}{x+1} \div \dfrac{x^2}{x^2-1}$

(ii) $\dfrac{x^2-36}{x^2-49} \div \dfrac{x+6}{x+7}$

(iii) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25} \div \dfrac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$

(iv) $\dfrac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77} \div \dfrac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\dfrac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10} \div \dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$

(vi) $\dfrac{3x^2-x-4}{9x^2-16} \div \dfrac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9} \div \dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

3.6.3 ناطق جملے کی جمع اور تفریق

اگر $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ اور $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ دو ناطق جملے کے ساتھ $q(x) \neq 0$ اور $s(x) \neq 0$ ہو تو تب حاصلِ جمع اور فرق

$$\frac{p(x)}{q(x)} \pm \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).s(x) \pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$$

مثال 3.28

مختصر کیجیے۔

(i) $\dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x-1}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$ (iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9} + \dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

حل :

(i) $$\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$$

(ii) $$\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2x^2+2}{(x^2-1)\ (x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(iii) $$\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\frac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$$

$$= \frac{x+2}{x+3}+\frac{x+6}{x+3} = \frac{x+2+x+6}{x+3} = \frac{2x+8}{x+3}$$

مثال 3.29 $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ کثیر رقمی کے ساتھ کونسا کثیر رقمی جمع کرنے پر ہمیں یہ $\frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ حاصل ہوتا ہے ؟

فرض کرو کہ $p(x)$ ناطق عدد ہے۔

$$\frac{x^3-1}{x^2+2}+p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$$

یعنی $$p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}-\frac{x^3-1}{x^2+2}$$

$$= \frac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \frac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$$

مثال 3.30 $\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\frac{x+2}{x+1}$ کو دو کثیر رقمیوں کے خارج قسمت کے طور پر مختصر کیجئے۔

حل :

Now, $$\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \left[\frac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right]+\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1} = \frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)} = \frac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

مشق 3.11

1) مندرجۂ ذیل کو دو کثیر رقمیوں کے خارج قسمت کے طور پر مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{x^3}{x-2}+\frac{8}{2-x}$

(ii) $\frac{x+2}{x^2+3x+2}+\frac{x-3}{x^2-2x-3}$

(iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

(iv) $\frac{x-2}{x^2-7x+10}+\frac{x+3}{x^2-2x-15}$

(v) $\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}-\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-3x-2}$ (vi) $\dfrac{x^2-4}{x^2+6x+8}-\dfrac{x^2-11x+30}{x^2-x-20}$

(vii) $\left[\dfrac{2x+5}{x+1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right]-\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)$ (viii) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}-\dfrac{2}{x^2+4x+3}$

(2 $\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$ ناطق جملے کے ساتھ کونسا کثیر رقمی جمع کرنے پر ہمیں $\dfrac{3x^3+2x^2+4}{x^2+2}$ حاصل ہوتا ہے ؟

(3 $\dfrac{4x^3-7x^2+5}{2x-1}$ کے ساتھ کونسا ناطق جملے کو تفریق کرنے پر ہمیں $2x^2-5x+1$ حاصل ہوتا ہے۔

(4 اگر $P=\dfrac{x}{x+y}, Q=\dfrac{y}{x+y}$ ہو تو $\dfrac{1}{P-Q}-\dfrac{2Q}{P^2-Q^2}$ دریافت کیجئے۔

3.7 جذرالمربع (Square Root)

فرض کرو۔ $a \in R$ ایک غیر صفری حقیقی عدد ہے۔ایک حقیقی عدد 'a' کا جذرالمربع b ہے ،اس طرح سے کہ $b^2 = a$۔ a کا مثبت جذرالمربع کو $\sqrt[2]{a}$ یا $\sqrt{a}$ کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔ حالانکہ دونوں $(-3)^2 = 9$ اور $(+3)^2 = 9$ صحیح ہیں۔نشان $\sqrt{\ }$ جو عدد اس کے اندر ہوتا ہے۔ مثبت جذرالمربع کی نشان دہی کے لئے استعمال ہوتا ہے۔ چنانچہ $\sqrt{9}=3$ ۔ اسی طرح $\sqrt{121}=11$ اور $\sqrt{10000}=100$ ہے۔

اس طریقے میں جملہ یا کثیر رقمیات کا جذرالمربع ،وہ جملہ ہے جو دئے گئے مربع جملے کے برابر ہے۔کثیر رقمی میں ہم اس طرح لیتے ہیں۔

$$\sqrt{(p(x))^2}=|p(x)| \quad \text{جس میں} \quad |p(x)|=\begin{cases}p(x) & \text{اگر } p(x)\ge 0\\ -p(x) & \text{اگر } p(x)<0\end{cases}$$

مثال کے طور پر $\sqrt{(a-b)^2}=|(a-b)|.$ $\quad \sqrt{(x-a)^2}=|(x-a)|$

عام طور پر کثیر رقمی کا جذرالمربع معلوم کرنے کیلئے نیچے دئے دو طریقے عام ہیں۔

(i) اجزائے ضربی کا طریقہ (ii) تقسیمی طریقہ

اس حصہ میں ہم کثیر رقمی جملے ،اگر وہ جزو ضربی کے قابل ہو تو اجزائے ضربی کے طریقے سے چند مثالوں کے ذریعے سیکھیں گے۔

3.7.1 اجزائے ضربی کے طریقے سے جذرالمربع معلوم کرنا :

مثال 3.31 جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$ (ii) $\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2-24xy$

حل :

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}}=11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}}=\left|\dfrac{9x^2y^3z^4}{8w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2-24xy}=\sqrt{4x^2+12xy+9y^2-24xy}=\sqrt{(2x-3y)^2}$

$=|(2x-3y)|$

مثال 3.32 جذر المربع معلوم کیجئے۔

(i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \frac{1}{x^6} - 2$

(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$

حل :

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x + 5y)^2} = |(2x + 5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \frac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\right|$

(iii) پہلے کثیر رقمی کا اجزائے ضربی معلوم کرنا چاہیے

$6x^2 - x - 2 = (2x + 1)(3x - 2)$; $3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1)$

$2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$

اب $\sqrt{(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)}$

$= \sqrt{(2x + 1)(3x - 2) \times (3x - 2)(x - 1) \times (x - 1)(2x + 1)}$

$= \sqrt{(2x + 1)^2 (3x - 2)^2 (x - 1)^2} = |(2x + 1)(3x - 2)(x - 1)|$

مشق 3.12

1. مندرجۂ ذیل کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

(i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a - b)^4 (b - c)^6$ (iii) $(x + 11)^2 - 44x$

(iv) $(x - y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\frac{64(a + b)^4 (x - y)^8 (b - c)^6}{25(x + y)^4 (a - b)^6 (b + c)^{10}}$

2. مندرجۂ ذیل کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

(i) $16x^2 - 24x + 9$

(ii) $(x^2 - 25)(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x - 15)$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$

(iv) $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$

(v) $(6x^2 + 5x - 6)(6x^2 - x - 2)(4x^2 + 8x + 3)$

(vi) $(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 5x - 2)(6x^2 - x - 1)$

3.7.2 تقسیمی طریقے سے کثیر رقمیات کا جذر المربع معلوم کرنا :

اس طریقے میں ہم ان کثیر رقمیات کا جذر المربع معلوم کریں گے۔ جن کے جزوِ ضربی آسانی کے ساتھ مختصر نہیں کر سکتے۔ اگر ان کے درجہ اعلٰی ہوں تو تقسیم میں آسانی ہوگی۔

جس طرح سے مثبت سالم اعداد کا جذر المربع معلوم کرتے ہیں۔ اسی طریقے سے کثیر رقمی کا جذر المربع بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ آیئے نیچے دئے گئے مثالوں کے ساتھ اس طریقے کو ہم سمجھیں۔

معلوم کرنے کے لئے:

(i) $\sqrt{66564}$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2\quad 5\quad 8 \\ \hline
2 & 6\ 65\ 64 \\
 & 4 \\ \hline
45 & 2\ 65 \\
 & 2\ 25 \\ \hline
508 & 40\ 64 \\
 & 40\ 64 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$

فرض کریں کہ $p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline
3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\
 & 9x^4 \\ \hline
6x^2 + 2x & 12x^3 + 10x^2 \\
 & 12x^3 + 4x^2 \\ \hline
6x^2 + 4x + 1 & 6x^2 + 4x + 1 \\
 & 6x^2 + 4x + 1 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

چنانچہ $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$ اور $\sqrt{66564} = 258$

برائے ذہن نشینی

(i) کثیر رقنی کے x کے درجوں کو صعودی اور نزولی ترتیب میں لکھتے وقت چھوٹی ہوئی رقموں کیلئے صفر لکھیں گے۔

(ii) اوپر کے طریقے کو نیچے دئے ہوئے عمل کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں۔

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a+b+c)^2}$$

چنانچہ اس طریقے سے ہم مطلوبہ یا مناسب a, b, c معلوم کر سکتے ہیں۔

اب
$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\
&= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 \\
&= a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c
\end{aligned}$$

غرض
$$= (3x^2)^2 + (6x^2 + 2x)(2x) + (6x^2 + 4x + 1)(1)$$

جب $a = 3x^2$ ، $b = 2x$ اور $c = 1$، $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$,

متبادل طریقہ : جذر المربع معلوم کرنے کے لئے پہلے ہم اسے اس طرح لکھیں۔ $9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

$$= (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)x^2 + 2nlx + l^2$$

پہلے سر اعداد کا موازنہ کریں اور اس کے بعد مناسب مستقل جیسے l , m , n معلوم کریں۔

(iii) اور بھی بالکل دلچسپ ہوگا۔ ذیل کو نوٹ کریں گے۔

$$\begin{aligned}
25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 &= 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4 \\
&= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2 \\
&= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2 \\
&= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c \\
&= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac \\
&= (a - b + c)^2
\end{aligned}$$

جہاں $a = 5x^2,\ b = 3x,\ c = 2$

$$\therefore \quad \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|.$$

مثال 3.33

$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$ کا جذرالمربع دریافت کیجئے۔

حل : دی گئی کثیر رقمی پہلے ہی سے x کی نزولی قوتوں میں ہے۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x + 6 \\
\hline
x^2 & x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2 - 5x & -10x^3 + 37x^2 \\
 & -10x^3 + 25x^2 \\
\hline
2x^2 - 10x + 6 & 12x^2 - 60x + 36 \\
 & 12x^2 - 60x + 36 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

چنانچہ $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$

مثال 3.34

$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$ کا جذرالمربع دریافت کیجئے۔

حل : پہلے x کے درجوں کو ان کی صعودی ترتیب میں لکھیں۔ اسکے بعد جذرالمربع معلوم کریں۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5 - 3x + x^2 \\
\hline
5 & 25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4 \\
 & 25 \\
\hline
10 - 3x & -30x + 19x^2 \\
 & -30x + 9x^2 \\
\hline
10 - 6x + x^2 & 10x^2 - 6x^3 + x^4 \\
 & 10x^2 - 6x^3 + x^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

چنانچہ کثیر رقمی کا جذرالمربع $|x^2 - 3x + 5|$ ہے۔

مثال 3.35

اگر $m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ایک کامل مربع ہو تو m اور n کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل :

کثیر رقمی کو x کی صعودی ترتیب میں لکھیں $9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x + 4 \\
3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m \\
 & 9x^4 \\
\hline
6x^2 + 2x & \quad 12x^3 + 28x^2 \\
 & \quad 12x^3 + 4x^2 \\
\hline
6x^2 + 4x + 4 & \qquad 24x^2 - nx + m \\
 & \qquad 24x^2 + 16x + 16 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

چونکہ دی گئی کثیر رقمی ایک کامل مربع ہے، اس میں $n = -16$ اور $m = 16$ ہوگا۔

مشق 3.13

1) مندرجۂ ذیل کثیر رقمی کا جذرالمربع تقسیمی طریقے سے دریافت کیجئے۔

(i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$

(iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$

2) مندرجہ ذیل کثیر رقمیات ایک کامل مربع ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$

(iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

3.8 دو درجی مساوات : (Quadratic equations)

یونانی ریاضی دان اقلیدس (Euclid) نے لمبائی معلوم کرنے کے لئے ایک ہندسوی طریقے کو اپنایا جسے ہم موجودہ دور میں دو درجی مساوات کا حل دریافت کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ دو درجی مساوات کو حل کرنے کا سہرا قدیم ہندوستانی ریاضی دانوں کے سر جاتا ہے۔ یہ حقیقت ہے کہ برہما گپتا (598 - 665 AD) نے دو درجی مساوات $ax^2 + bx = c$ کو حل کرنے کے لئے ایک ضابطہ دیا بعد میں سری دھر آچاریہ (1025 AD) نے کامل مربع کے طریقے سے دو درجی مساوات حل کرنے کے لئے ایک ضابطہ دیا جسے دو درجی ضابطہ کہا جاتا ہے۔ (بھاسکرا II کے مطابق)

اس حصے میں مختلف طریقے سے دو درجی مساوات کو حل کرنا سیکھیں گے۔ ہم دو درجی مساوات کے استعمالات بھی دیکھیں گے۔

تعریف

مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ایک دو درجی مساوات ہے جس میں x ایک متغیر ہے۔ a, b, c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$

حقیقت میں $p(x) = 0$ کوئی بھی مساوات، جس میں $p(x)$ کثیر رقمی کا درجہ 2 ہے، دو درجی مساوات ہوگی۔ جس کی معیاری صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ہے، $a \neq 0$

مثال کے طور پر $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $1 - x + x^2 = 0$ بعض دو درجی مساوات ہیں۔

3.8.1 اجزائے ضربی طریقے سے دو درجی مساوات کا حل

اجزائے ضربی طریقہ استعمال کرتے ہیں جب دو درجی کے اجزائے ضربی نکال سکتے ہیں۔اس کے خطی اجزا میں حاصل ضرب دیا گیا ہے۔ اگر کوئی بھی جز صفر ہے تو پورا حاصل ضرب صفر ہے۔ایسے ہی اگر حاصل ضرب صفر کے برابر ہے تو چند جز اس حاصل ضرب کے صفر ہی ہوں گے اور کوئی جز میں جس میں نا معلوم رقم ہے وہ بھی صفر کے برابر ہوں گے۔غرض دو درجی مساوات کو حل کرنے میں ہمیں x کی قیمت معلوم کرنا ہے جو ہر ایک جز کو صفر بنا دیتی ہے۔ایسے ہی ہم ہر جز کو صفر کے برابر کرنا ہے اور نا معلوم کو حل کرنا ہے۔

مثال 3.36 حل کرو : $6x^2 - 5x - 25 = 0$

حل : $6x^2 - 5x - 25 = 0$

یعنی پہلے 'α' اور ' β' معلوم کرنا چاہئے۔ اس طرح کہ $\alpha + \beta = -5$ اور $\alpha\beta = 6\times(-25) = -150$ ہے۔

یہاں x کا سر عدد -5 ہے۔ چنانچہ ہمیں $\alpha = -15$ اور $\beta = 10$ دوسرا عدد

$$6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x-5) + 5(2x-5)$$
$$= (2x-5)(3x+5)$$

$2x - 5 = 0 \quad \therefore$ اور $3x + 5 = 0$

$x = -\frac{5}{3}\ ,\ x = \frac{5}{2}$ حل مجموعہ $= \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$

مثال 3.37 حل کرو

$$\frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0$$

حل : دی گئی مساوات دو درجی مساوات نہیں ہے۔مگر اس کو دو درجی مساوات میں مختصر کر سکتے ہیں۔

اب
$$\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{6(x^2-9) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 6x^2 - 54 - 42 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ مساوات دو درجی مساوات ہے۔اور اسکی دو قیمتیں حاصل ہوتے ہیں۔

$$x = 4\ ,\ x = -4$$

$\therefore$ حل مجموعہ $= \{4, -4\}$

مثال 3.38

حل کرو $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x\ ,\ 3 - 4x > 0$

$$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$$

حل : دونوں طرف مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $24 - 10x = (3 - 4x)^2$

$$\Rightarrow 16x^2 - 14x - 15 = 0 \quad \Rightarrow 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (8x+5)(2x-3)=0 \qquad x=\frac{3}{2} \text{ یا } -\frac{5}{8}$$

جب $x=\frac{3}{2}$ ، $3-4x=3-4\left(\frac{3}{2}\right)<0$ مساوات کا حل نہیں ہے۔ $x=\frac{3}{2}$

جب $3-4x>0$ ، $x=-\frac{5}{8}$ ∴ حل مجموعہ $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$ ہے۔

برائے ذہن نشینی

اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کے لئے ہم **مربع کرنے کی خاصیت** استعمال کرتے ہیں۔
$a=b \Rightarrow a^2=b^2$ بدقسمتی سے یہ مربع خاصیت یقینی نہیں ہے کہ نئی مساوات کے سب حل اصلی مساوات کے حل ہیں۔ مثال کے طور پر مساوات $x=5$ کو مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x^2=25$ جس سے ہمیں اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ $x=5$ اور $x=-5$ ۔ مگر $x=-5$ اصل (دی گئی) مساوات کا حل نہیں ہے۔ ایسے حل **خارجی (extraneous) حل** کہلاتے ہیں۔
لہٰذا اوپری مثال میں دکھایا گیا ہے کہ جب مساوات کے دونوں طرف مربع کرتے ہیں تو حاصل شدہ مساوات کے حل کو جانچنا چاہئے کہ وہ حل اصلی مساوات کے حل ہیں یا نہیں۔ یہ ضروری ہے اس لئے کہ مربع کرنے پر اصلی مساوات کے حل کھو نہ جائیں۔ مگر چند رقموں کا تعارف کروانا ہے جو نئے مساوات کے جذر ہیں۔ مگر اصلی مساوات کے نہیں۔

مشق 3.14

1. مندرجۂ ذیل دو درجی مساوات کو اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کیجئے۔

(i) $(2x+3)^2-81=0$ (ii) $3x^2-5x-12=0$ (iii) $\sqrt{5}x^2+2x-3\sqrt{5}=0$

(iv) $3(x^2-6)=x(x+7)-3$ (v) $3x-\frac{8}{x}=2$ (vi) $x+\frac{1}{x}=\frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2-(a^2+b^2)x+1=0$

(ix) $2(x+1)^2-5(x+1)=12$ (x) $3(x-4)^2-5(x-4)=12$

3.8.2 کامل مربع کے طریقے سے دو درجی مساوات کا حل (Solution of a quadratic equation by completing square)

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ سے غور کیجئے کہ آخری رقم $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ، 'x' سر عدد کے آدھا کا مربع ہے۔ چنانچہ (x^2+bx) میں $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ کم ہوگا۔ صرف رقم $\left(x+\frac{b}{2}\right)$ کا مربع ہوگا۔ غرض اگر x سر عدد کے آدھے کا مربع x^2+bx جملے میں جمع کیا جائے تو نتیجہ دو رقمی کا مربع ہے۔ اس طرح کی جمع عام طور پر **کامل مربع کی جمع** کہلاتی ہے۔ اس حصے میں ہم دو درجی مساوات کا حل کامل مربع کا طریقے سے نیچے دیئے گئے منزل کے مطابق کریں گے۔

منزل 1 : اگر x^2 کا سر عدد '1' ہے تو دوسری منزل کو جانا ہے۔ اگر نہیں تو مساوات کے دونوں طرف x^2 کے سر عدد سے تقسیم کرنا ہے تمام رقمیں متغیر کے ساتھ مساوات کے ایک ہی طرف لانا ہے۔

منزل 2 : x کے سر عدد کا آدھا معلوم کروا اور اسے مربع کرو۔ حاصل شدہ عدد کو مساوات کے دونوں طرف جمع کرو۔ مساوات کو حل کرنے کے لئے **جذر المربع کی خاصیت** استعمال کرو۔

$x^2=t \Rightarrow x=\sqrt{t}$ یا $x=-\sqrt{t}$ جس میں 't' غیر منفی عدد ہے۔

مثال 3.39

کامل مربع کے طریقے سے $5x^2 - 6x - 2 = 0$ دودرجی مساوات کو حل کیجئے۔

حل : دی گئی مساوات $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ہے۔

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$$ (دونوں جانب 5 سے تقسیم کرنا چاہیئے)

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5}$$ (x کے سرعدد کا آدھا $\frac{3}{5}$ ہے)

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5}$$ (دونوں جانب $\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$ جمع کرنے پر)

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$ (دونوں جانب جذرالمربع کرنا چاہیئے)

چنانچہ ہمیں $$x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}.$$

اور حل مجموعہ $\left\{\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right\}$. ہے۔

مثال 3.40

کامل مربع کے طریقے سے مساوات کو حل کیجئے۔ $a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$

حل : اگر $a = 0$ ہو تو اس مساوات میں ثابت کرنے کیلئے کچھ بھی نہیں۔ $a \neq 0$ کے لئے ہمارے پاس ہے تو ہمیں

$$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3b \pm b}{2a}$$

حل مجموعہ $= \left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$.

3.8.3 ضابطے کے طریقے سے دودرجی مساوات کا حل (Solution of quadratic equation by formula method)

اس حصّے میں ہم دودرجی ضابطہ حاصل کریں گے، جو دودرجی مساوات کے جذروں کو معلوم کرنے کے لئے فائدہ مند ہوگا۔

ایک دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ کو فرض کریں۔ ہم دی گئی مساوات کو دوبارہ اس طرح لکھیں گے۔

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ کو دونوں طرف جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔ $$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

یعنی $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

جیسا کہ $$\implies \quad x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

لہٰذا، ہمیں حاصل ہوا $$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (1)$$

حل مجموعہ $$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}.$$

مساوات (1) میں دیا گیا **دودرجی ضابطہ** کہلاتا ہے۔ اب ہم دودرجی ضابطہ استعمال کرتے ہوئے مساوات کو حاصل کریں۔

مثال 3.41

ضابطہ کو استعمال کر کے مساوات کو حل کیجئے۔ $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{4}{x+4}$

جس میں $x+1\neq 0, x+2\neq 0$ اور $x+4\neq 0$

حل : دی گئی مساوات دودرجی مساوات نہیں ہے۔ غور کریں

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{4}{x+4}$$

یعنی $$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4}-\frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x+4-x-4}{(x+4)(x+2)}\right]$$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$$x^2+6x+8 = 2x^2+2x$$

ہمیں $x^2-4x-8=0$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دودرجی مساوات ہے۔

(اوپر دی گئی مساوات کو LCM کے ذریعے بھی حل کر سکتے ہیں)

ضابطہ کے استعمال سے

$$x = \frac{4\pm\sqrt{16-4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4\pm\sqrt{48}}{2}$$

چنانچہ $$x = 2+2\sqrt{3} \text{ or } 2-2\sqrt{3}$$

حل مجموعہ $$= \{2-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3}\}$$

مشق 3.15

1) کامل مربع کے طریقہ سے مندرجہ ذیل دودرجی مساوات کو حل کیجئے۔

(i) $x^2+6x-7=0$

(ii) $x^2+3x+1=0$

(iii) $2x^2+5x-3=0$

(iv) $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

(v) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$

(vi) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$

2. ضابطے کو استعمال کرکے دودرجی مساوات کو حل کیجئے۔

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

(v) $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ (vi) $36x^2 - 12ax + (a^2 - b^2) = 0$

(vii) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2 + (a^2 - b^2)x - b^2 = 0$

3.8.4 دودرجی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے مسئلوں کا حل

اب ہم بعد روزمرہ کی زندگی میں استعمال ہونے والے چند سادے مسئلے جو الفاظ میں ظاہر کئے گئے اور چند مسئلے روزانہ زندگی کے حالات جن میں دودرجی مساوات شامل ہیں۔ پہلے ہم دی گئی مساوات کو تبدیل کرتے ہوئے ایک اور مساوات بنائیں۔ اس کے بعد ہم مسئلہ کی مناسبت سے اس کا حل معلوم کریں گے۔

مثال 3.42

ایک عدد اور اس کے معکوس کا حاصلِ جمع $5\frac{1}{5}$ ہے۔ عدد دریافت کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ عدد x اور اُس کا معکوس $\frac{1}{x}$ ہے۔

دونوں کو جمع کرنے پر $x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \implies \frac{x^2+1}{x} = \frac{26}{5}$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$\implies 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$$

$$(5x - 1)(x - 5) = 0 \implies x = 5 \text{ یا } \frac{1}{5}$$

لہٰذا دو درکار اعداد $5, \frac{1}{5}$ ہیں۔

مثال 3.43

مثلث کا قاعدہ اس کے عمود سے 4 سمر بڑا ہے۔ اگر مثلث کا رقبہ 48 مربع سمر ہے۔ مثلث کا قاعدہ اور عمود کی اونچائی دریافت کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ مثلث کی اونچائی x سمر ہے۔

دیے گئے اصول کے تحت مثلث کا قاعدہ $(x + 4)$ سمر ہے۔

$\therefore$ مثلث کا رقبہ = ½ × قاعدہ × اونچائی

دیے گئے اصول کے تحت $\frac{1}{2}(x + 4)(x) = 48$

$$\implies x^2 + 4x - 96 = 0 \implies (x + 12)(x - 8) = 0$$

$$\implies x = -12 \text{ یا } 8$$

مگر $x = -12$ ممکن نہیں ہے۔ (اونچائی مثبت عدد ہونا چاہئے)

$\therefore x = 8$ اور $x + 4 = 12$

لہٰذا مثلث کی اونچائی 8 سمر ہے اور قاعدہ 12 سمر ہے۔

مثال 3.44 ایک کار مقرر کردہ وقت سے 30 منٹ بعد نکلتی ہے۔اس کی منزل 150 کلومیٹر دور ہے۔وقت پر پہنچنے کے لئے وہ اپنی معمول رفتار سے 25 کلومیٹر فی گھنٹہ اپنی رفتار کو بڑھاتا ہے۔ اس کی معمول رفتار معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ کار کی معمولی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

حالانکہ بڑھائی گئی کار کی رفتار $(x + 25)$ کلومیٹر فی گھنٹہ ہے

کل فاصلہ = 150 کلومیٹر لیا گیا وقت = $\frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}}$

T_1 اور T_2 گھنٹوں میں لیا گیا وقت ہے جس میں وقت پر پہنچنے کے لئے کار کو دیا گیا وقت اور کم کیا گیا وقت (جب کار کی رفتار بڑھے گی) حسب معمول ہے

دئے گئے معلومات سے $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ (30 منٹ $= \frac{1}{2}$ گھنٹہ)

$$\Rightarrow \quad \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 25x - 7500 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+100)(x-75) = 0$$

$$x = 75 \text{ یا } -100$$

چونکہ $x = -100$ منفی قیمت ہے لہٰذا یہ قابل قبول قیمت نہیں۔ لہٰذا کار کی معمولی رفتار 75 کلومیٹر فی گھنٹہ ہوگی۔

مشق 3.16

1. ایک عدد اور اس کے معکوس کا حاصل جمع $\frac{65}{8}$ ہے۔عدد معلوم کرو۔
2. دو مثبت اعداد کے مربعوں کا فرق 45 ہے چھوٹے عدد کا مربع، بڑے مربع کا چار گنا ہے۔اعداد معلوم کیجئے۔
3. ایک کسان چاہتا ہے کہ 100 مربع میٹر مستطیلی ترکاری کا باغ شروع کریں اس کے پاس صرف 30 میٹر (Barbed wire) ہے۔ وہ مستطیلی باغ کو باڑھ لگاتا ہے۔وہ اپنے گھر کے ایک حصہ کے کمپاؤنڈ کو بطور چوتھا حصہ مان کر صرف تین حصوں میں باڑھ لگاتا ہے۔ باغ کے ابعاد معلوم کیجئے۔
4. ایک مستطیل کھیت کی لمبائی 20 میٹر اور چوڑائی 14 میٹر ہے۔ وہاں ایک بیرونی راستہ ہے، جس کی مساوی چوڑائی ہے۔اس کا رقبہ 111 مربع میٹر ہے۔باہر کے راستے کی چوڑائی معلوم کیجئے۔
5. ایک ریل گاڑی مساوی رفتار میں 90 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔اور وہ 15 کلومیٹر فی گھنٹہ اپنی رفتار بڑھاتا ہے تو اس کے سفر کے وقفہ میں 30 منٹ کم لگیں گے۔ ریل گاڑی کی مخصوص رفتار معلوم کیجئے۔
6. ایک کشتی کی رفتار ساکن پانی میں 30 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے وہ پانی کے بہاؤ کی مخالف سمت میں 30 کلومیٹر جا کر واپس اپنے مقام تک آنے کے لئے 4 گھنٹے 30 منٹ لیتی ہے۔ پانی کی رفتار معلوم کیجئے۔
7. ایک سال پہلے ایک آدمی کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کا 8 گنا تھی۔ اب اس کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کے مربع کے برابر ہے۔ان کی موجودہ عمریں معلوم کرو۔
8. ایک شطرنج کے بورڈ میں 64 مساوی مربع ہیں اور ہر مربع کا رقبہ 6.25 مربع سمر ہے۔بورڈ کے اطراف کا کنارا 2 سنٹی میٹر چوڑا ہے۔ شطرنج کے بورڈ کی اطراف کی لمبائی معلوم کیجئے۔

9۔ ایک کام کو ختم کرنے کے لئے A کو B سے 6 دن کم لگتے ہیں۔ اگر A اور B دونوں مل کر اس کام کو 4 دن میں پورا کرتے ہیں تو صرف B کو اس کام ختم کرنے کے لئے کتنے دن لگیں گے؟

10۔ دو ٹرینیں ایک اسٹیشن سے ایک ہی وقت پر نکلتی ہیں۔ ایک ٹرین مغرب کی طرف روانہ ہوتی ہے اور دوسری ٹرین شمال کی طرف روانہ ہوتی ہے۔ دوسری ٹرین کی بہ نسبت پہلی ٹرین 5 کلومیٹر فی گھنٹہ تیز چلتی ہے۔ دو گھنٹوں پر وہ دونوں ایک دوسرے سے 50 کلومیٹر کی دوری پر ہیں۔ ٹرین کی اوسط رفتار معلوم کرو۔

3.8.5۔ ایک دو درجی مساوات کے جذروں کی نوعیت

مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کے لئے یہ ضابطہ کیا گیا ہے $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

اگر $b^2 - 4ac > 0$ ، ہو تو ہم دو حقیقی جذر حاصل ہوتے ہیں۔

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو اس کے دو جذر ہوں گے $x = \dfrac{-b}{2a}$

اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ایک حقیقی عدد نہیں ہوگا۔لہٰذا دی گئی دو درجی مساوات کے حقیقی جذر نہیں ہوں گے۔

لہٰذا جذروں کی نوعیت $b^2 - 4ac$ کی قیمتوں پر منحصر ہوتی ہے۔ $b^2 - 4ac$ کی عبارت ، $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کی نوعیت کا فرق کرتی ہے اور اس لئے اس کو دو درجی مساوات کی **امتیازی خصوصیت** کہا جاتا ہے اور اس کو علامت Δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

جذروں کی نوعیت	امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$
حقیقی اور غیر مساوی	$\Delta > 0$
حقیقی اور مساوی	$\Delta = 0$
حقیقی جذر نہیں ہوتے (اس کے مجازی جذر ہوتے ہیں)	$\Delta < 0$

مثال 3.45 درج ذیل دو درجی مساوات کے جذروں کی نوعیت معلوم کرو۔

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$ (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

حل : مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے لئے امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

(i) یہاں پر $a = 1$ $b = -11$ اور $c = -10$

یہاں پر امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$$

$\Delta > 0$، لہٰذا جذر حقیقی اور غیر مساوی ہیں

(ii) $a = 4$; $b = -28$ اور $c = 49$

یہاں پر امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$$

چونکہ $\Delta = 0$ ہے، دی گئی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہیں۔

(iii) یہاں پر $a = 2$ ؛ $b = 5$ اور $c = 5$

یہاں پر امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (5)^2 - 4(2)(5) = 25 - 40 = -15$

چونکہ $\Delta < 0$ ہیں، مساوات کے حقیقی جذر نہیں ہیں۔

مثال 3.46

ثابت کیجئے کہ مساوات $(a - b + c)x^2 + 2(a - b)x + (a - b - c) = 0$ کے جذر تمام حقیقی اعداد a اور b کے لئے ناطق اور تمام c کے لئے ناطق ہوں گے۔

حل : فرض کرو کہ دی گئی مساوات $Ax^2 + Bx + c = 0$ کی شکل میں ہو تو

$A = a - b + c$, $B = 2(a - b)$ اور $c = a - b - c$

اب $Ax^2 + Bx + c = 0$ کا امتیازی خصوصیت

$$B^2 - 4AC = [2(a - b)]^2 - 4(a - b + c)(a - b - c)$$

$$= 4(a - b)^2 - 4[(a - b) + c][(a - b) - c]$$

$$= 4(a - b)^2 - 4[(a - b)^2 - c^2]$$

ایک کامل مربع ہے $\Delta = 4(a - b)^2 - 4(a - b)^2 + 4c^2 = 4c^2$

چونکہ $\Delta > 0$ $\therefore$ ایک کامل مربع ہے، لہٰذا دی گئی مساوات کے جذر ناطق اعداد ہوں گے۔

مثال 3.47

k کی قیمت دریافت کیجئے۔ جبکہ مساوات $x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$ حقیقی اور مساوی جذر ہے۔

حل : دی گئی مساوات

$$x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0 \quad (1)$$

فرض کرو کہ مساوات (1) $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں ہے۔

یہاں $a = 1$, $b = -2(3k + 1)$, $c = 7(3 + 2k)$

یہاں پر امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-2(3k + 1))^2 - 4(1)(7)(3 + 2k)$$

$$= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3 + 2k) = 4(9k^2 - 8k - 20)$$

دی گئی مساوات کے جذر مساوی ہیں، لہٰذا $\Delta = 0$

$$\Rightarrow 9k^2 - 8k - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (k - 2)(9k + 10) = 0$$

چنانچہ $k = 2, -\frac{10}{9}$.

مشق 3.17

1. مساوات کے جذروں کی نوعیت معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

(iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

(v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. مندرجۂ ذیل مساوات میں k کی قیمت معلوم کیجئے۔ جبکہ جذر حقیقی اور مساوی ہیں۔

(i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

(iii) $x^2 + 2k(x - 2) + 5) = 0$ (iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

3. ثابت کیجئے کہ مساوات کے جذر غیر حقیقی ہیں۔ $x^2 + 2(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$

4. ثابت کیجئے کہ مساوات کے جذر حقیقی نہیں ہیں۔ $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$

5. اگر مساوات کے جذر $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + c^2 + d^2 = 0$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
$ad - bc \neq 0$

6. ثابت کیجئے کہ $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ کے جذر ہمیشہ حقیقی ہیں اور وہ اس وقت تک مساوی نہیں ہوسکتے جب تک کہ $a = b = c$ ہو۔

7. اگر مساوات $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ کے جذر مساوی ہوں تو ثابت کیجئے کہ $c^2 = a^2(1 + m^2)$

3.8.6 دودرجی مساوات کے جذر اور سر اعداد کا درمیانی تعلق :

دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ پر غور کیجئے، جہاں پر 'a' 'b' اور 'c' حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ہے۔
دی گئی مساوات کے جذر α اور β ہیں۔

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

جذروں کا حاصلِ جمع

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b}{a} = \frac{-\, x \text{ کا سر عدد}}{x^2 \text{ کا سر عدد}}$$

جذروں کا حاصلِ ضرب

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا سر عدد}}$$

چنانچہ $ax^2+bx+c=0$ کے جذر $'\alpha'$ اور $'\beta'$ ہیں۔

(i) جذروں کا حاصلِ جمع $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

(ii) جذروں کا حاصلِ ضرب $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

اگر جذریں دیے گئے ہوں تو ان سے مساوات کی تشکیل

فرض کرو کہ مساوات کے جذریں α اور β ہیں۔تب $(x-\alpha)$ اور $(x-\beta)$ جزوِ ضربی ہیں۔

یعنی

$$(x-\alpha)\ (x-\beta)=0$$

$$\Rightarrow\ x^2-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\,\beta=0$$

$x^2-($جذروں کا حاصلِ جمع$)\,x+($جذروں کا حاصلِ ضرب$)=0$

غور کریں

اس میں ایک ہی جذروں کے لامحدود دو درجی مساوات ہوتے ہیں۔

مثال 3.48

اگر ایک مساوات $3x^2-10x+k=0$ کا جذر $\frac{1}{3}$ ہو تو دوسرا جذر معلوم کیجئے۔اور k کی قیمت بھی معلوم کیجئے۔

حل :

دی گئی مساوات $3x^2-10x+k=0$ ہے۔

فرض کرو کہ جذریں α اور β ہیں۔

$$\alpha+\beta=\frac{-(-10)}{3}=\frac{10}{3} \qquad (1)$$

$\alpha=\frac{1}{3}$ مساوات (1) میں درج کریں تو ہمیں $\beta=3$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\alpha\,\beta=\frac{k}{3}\quad\Rightarrow k=3$$

چنانچہ دوسرا جذر $\beta=3$ اور k کی قیمت 3 ہے۔یعنی $k=3$ ہے۔

مثال 3.49

اگر دو درجی مساوات $ax^2-5x+c=0$ کا حاصلِ جمع اور حاصلِ ضرب 10 کے مساوی ہے۔تو a اور c کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل : دی گئی مساوات $ax^2-5x+c=0$ ہے۔

جذروں کا حاصلِ جمع $\frac{5}{a}=10,\ \Longrightarrow\ a=\frac{1}{2}$

جذروں کا حاصلِ ضرب $\frac{c}{a}=10$

$$\Longrightarrow\ c=10\,a=10\times\frac{1}{2}=5$$

$\therefore\ c=5$ اور $a=\frac{1}{2}$ ہے۔

غور کریں

اگر $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر α اور β ہیں تو $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے α اور β کے کئی جملے جیسے $\alpha^2 + \beta^2$، $\alpha^2 \beta^2$، $\alpha^2 - \beta^2$ وغیرہ معلوم کرسکتے ہیں۔

α اور β کو شمار کرتے ہوئے چند نتیجے لکھیں۔

(i) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha + \beta\,[\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}]$ صرف اگر $\alpha \geq \beta$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$

مثال 3.50

اگر مساوات $2x^2 - 3x - 1 = 0$ کے جذر α اور β ہوں تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha - \beta$ اگر $\alpha > \beta$ (iv) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right)$ (vi) $\alpha^4 + \beta^4$ (vii) $\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha}$

حل : دی گئی مساوات $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ہے۔

فرض کرو کہ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ہے۔

$a = 2, b = -3, c = 1$ α اور β مساوات کے جذر یں ہیں۔

$$\therefore\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

(i) $$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

(ii) $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{13}{4} \times (-2) = -\frac{13}{2}$$

(iii) $$\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4} + 2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

(iv) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{27}{8}+\frac{9}{4}}{\frac{-1}{2}}=-\dfrac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\beta\right)=\dfrac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(vi) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$$=\left(\frac{13}{4}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{169}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}.$$

(vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}=\dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}=\left(\dfrac{161}{16}\right)\left(-\dfrac{2}{1}\right)=-\dfrac{161}{8}.$

مثال 3.51

مساوات کی تشکیل کیجیے جس کے جذریں $7+\sqrt{3}$ اور $7-\sqrt{3}$ ہیں۔

حل : دی گئی جذریں $7+\sqrt{3}$ اور $7-\sqrt{3}$ ہیں۔

جذروں کا حاصلِ جمع $=7+\sqrt{3}+7-\sqrt{3}=14$

جذروں کا حاصلِ ضرب $=(7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3})$

$$=(7)^2-(\sqrt{3})^2=49-3=46$$

مساوات کی تشکیل $= x^2-$ (حاصلِ جمع) $x-$ (حاصلِ ضرب) $=0$

چنانچہ مساوات $x^2-14x+46=0$ ہے۔

مثال 3.52

اگر مساوات $3x^2-4x+1=0$ کے جذر α اور β ہوں تو مساوات کی تشکیل کیجیے جس کے جذریں ہیں۔ $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ اور $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ ہیں

حل : فرض کرو کہ $3x^2-4x+1=0$ مساوات کے جذر α اور β ہیں۔

تو ہمیں $\alpha+\beta=\dfrac{4}{3},\quad \alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

جذروں کا حاصلِ جمع $=\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{28}{9}$$

جذروں کا حاصلِ ضرب $=\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)=\alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

چنانچہ مساوات $9x^2-28x+3=0$ یا $x^2-\dfrac{28}{9}x+\dfrac{1}{3}=0 \quad \therefore$

مشق 3.18

1) مندرجہ ذیل مساوات کے حاصلِ جمع اور حاصلِ ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - 6x + 5 = 0$　　(ii) $kx^2 + rx + pk = 0$

(iii) $3x^2 - 5x = 0$　　(iv) $8x^2 - 25 = 0$

2). مساوات کی تشکیل کیجئے جس کے جذر ہیں۔

(i) 3 , 4　　(ii) $3+\sqrt{7}, 3-\sqrt{7}$　　(iii) $\frac{4+\sqrt{7}}{2}, \frac{4-\sqrt{7}}{2}$

3). اگر مساوات $3x^2 - 5x + 2 = 0$ کے جذر α اور β ہوں تو ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$　　(ii) $\alpha - \beta$　　(iii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

4). اگر مساوات $3x^2 - 6x + 4 = 0$ کے جذریں α اور β ہیں۔تو $\alpha^2 + \beta^2$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

5). اگر مساوات $2x^2 - 3x - 5 = 0$ کے جذریں α اور β ہیں تو مساوات کی تشکیل کیجئے۔جسکے جذریں α^2 اور β^2 ہیں۔

6). اگر مساوات $x^2 - 3x + 2 = 0$ کے جذریں α اور β ہوں تو دو درجی مساوات کی تشکیل کیجئے جس کے جذریں $-\alpha$ اور $-\beta$ ہیں

7). اگر α اور β مساوات $x^2 - 3x - 1 = 0$ کے جذریں ہیں تو مساوات کی تشکیل کیجئے۔جسکے جذریں $\frac{1}{\alpha^2}$ اور $\frac{1}{\beta^2}$ ہیں

8). اگر α اور β مساوات $3x^2 - 6x + 1 = 0$ کے جذریں ہیں۔ دو درجی مساوات کی تشکیل کیجئے۔جس کے جذریں

(i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$　　(ii) $\alpha^2\beta, \beta^2\alpha$　　(iii) $2\alpha + \beta, 2\beta + \alpha$

9). ایک دو درجی مساوات معلوم کیجئے جس کے جذریں مساوات کے $4x^2 - 3x - 1 = 0$ کے جذر کے معکوس ہیں۔

10). اگر $3x^2 + kx - 81 = 0$ مساوات کا ایک جذر اس کے دوسرے جذر کے مربع ہے تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

11). اگر $2x^2 - ax + 64 = 0$ مساوات کا ایک جذر اس کے دوسرے جذر کا دُگنا ہے۔a کی قیمت معلوم کیجئے۔

12). اگر $5x^2 - px + 1 = 0$ کا جذر α اور β ہیں اور $\alpha - \beta = 1$ ہے۔تو p کی قیمت معلوم کیجئے۔

مشق 3.19

صحیح جواب منتخب کیجئے۔

1). اگر سسٹم $6x - 2y = 3$ ، $kx - y = 2$ ایک ہی حل رکھتے ہیں تو

(A) $k = 3$　　(B) $k \neq 3$　　(C) $k = 4$　　(D) $k \neq 4$

2). ایک سسٹم کے دو خطی مساوات میں دو متغیرات ملتے ہیں اگر ان کی ترسیم

(A) ملتے ہیں　　(B) صرف ایک نقطے پر قطع کرتے　　(C) کسی بھی نقطے پر قطع نہیں کرتے　　(D) x محور پر کاٹتے ہیں

3). مساوات کے نظام $x - 4y = 8 , 3x - 12y = 24$

(A) لامحدود کئی حل ہیں　　(B) حل نہیں　　(C) ایک ہی حل ہے　　(D) حل ہو بھی سکتا یا نہیں بھی

4). اگر کثیر رقمی $p(x) = (k+4)x^2 + 13x + 3k$ ایک صفر دوسرے کا معکوس ہے۔تو k برابر ہے۔

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5). کثیر رقمی $f(x) = 2x^2 + (p+3)x + 5$ دوصفروں کا حاصل جمع صفر ہے۔تو p کی قیمت ہے۔

(A) 3 (B) 4 (C) -3 (D) -4

6) $x^2 - 2x + 7$ کو $x + 4$ سے تقسیم کرنے پر باقی

(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7). $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ کو $x - 1$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت

(A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8). $(x^3 + 1)$ اور $(x^4 - 1)$ کا GCD

(A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x + 1$ (D) $x - 1$

9). $x^2 - 2xy + y^2$ اور $x^4 - y^4$ کا G.C.D

(A) 1 (B) $x + y$ (C) $x - y$ (D) $x^2 - y^2$

10). $x^3 - a^3$ اور $(x - a)^2$ کا L.C.M

(A) $(x^3 - a^3)(x + a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x - a)^2$

(C) $(x - a)^2 (x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x + a)^2 (x^2 + ax + a^2)$

11). a^k, a^{k+3}, a^{k+5} کا L.C.M جہاں $K \in N$ ہے۔

(A) a^{k+9} (B) a^k (C) a^{k+6} (D) a^{k+5}

12). $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ ناطق جملے کو مختصر کیجئے۔

(A) $\dfrac{x-3}{x+3}$ (B) $\dfrac{x+3}{x-3}$ (C) $\dfrac{x+2}{x-3}$ (D) $\dfrac{x-3}{x+2}$

13). اگر $\dfrac{a+b}{a-b}$ اور $\dfrac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ دو ناطق جملے ہیں تو۔اُن کا حاصلِ ضرب

(A) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$ (B) $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (C) $\dfrac{a^2 - ab - b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (D) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab - b^2}$

14). $\dfrac{x^2 - 25}{x + 3}$ کو $\dfrac{x+5}{x^2 - 9}$ سے تقسیم کرنے پر مساوی ہے۔

(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15). اگر $\dfrac{a^3}{a-b}$ کو $\dfrac{b^3}{b-a}$ کے ساتھ جمع کرنے پر نیا ناطق جملہ

(A) $a^2 + ab + b^2$ (B) $a^2 - ab + b^2$ (C) $a^3 + b^3$ (D) $a^3 - b^3$

16). $49(x^2 - 2xy + y^2)^2$ کا جذرالمربع

(A) $7|x - y|$ (B) $7(x + y)(x - y)$ (C) $7(x + y)^2$ (D) $7(x - y)^2$

17). $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$ کا جذرالمربع

(A) $|x + y - z|$ (B) $|x - y + z|$ (C) $|x + y + z|$ (D) $|x - y - z|$

(18 $121x^4 y^8 z^6 (l-m)^2$ کا جذرالمربع

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2y^4|z^3(l-m)|$

.(19 اگر $ax^2+bx+c=0$ مساوات کے جذر مساوی ہیں تو c مساوی ہے۔

(A) $\frac{b^2}{2a}$ (B) $\frac{b^2}{4a}$ (C) $-\frac{b^2}{2a}$ (D) $-\frac{b^2}{4a}$

.(20 اگر $x^2+5kx+16=0$ مساوات کے جذر غیر حقیقی ہیں۔تب

(A) $k>\frac{8}{5}$ (B) $k>-\frac{8}{5}$ (C) $-\frac{8}{5}<k<\frac{8}{5}$ (D) $0<k<\frac{8}{5}$

.(21 دودرجی مساوات کا ایک جذر $3+2\sqrt{3}$ ہے۔

(A) $x^2-6x-5=0$ (B) $x^2+6x-5=0$

(A) $x^2-5x-6=0$ (D) $x^2-5x+6=0$

.(22 مساوات $x^2-bx+c=0$ اور $x^2+bx-a=0$ کے مشترک جذر

(A) $\frac{c+a}{2b}$ (B) $\frac{c-a}{2b}$ (C) $\frac{c+b}{2a}$ (D) $\frac{a+b}{2c}$

.(23 اگر $ax^2+bx+c=0$ مساوات کے جذر α اور β ہیں۔$a \neq 0$ اس کا غلط بیان اس طرح ہوگا۔

(A) $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(C) $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$ (D) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{c}$

.(24 اگر α اور β مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جذر ہیں۔تب دودرجی مساوات کے جذریں $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ ہیں۔

(A) $ax^2+bx+c=0$ (B) $bx^2+ax+c=0$

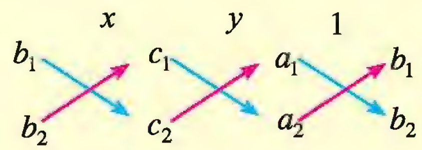
(C) $cx^2+bx+a=0$ (D) $cx^2+ax+b=0$

.(25 اگر $b=a+c$ تب مساوات $ax^2+bx+c=0$

(A) حقیقی جذریں (B) جذریں نہیں ہوں گے (C) مساوی جذریں (D) غیر حقیقی جذریں

یاد رکھنے کے نکات

- x اور y دو تغیرات میں محدود اعداد کے خطی مساوات کا مجموعہ x اور y میں خطی مساوات کا نظام کہلاتا ہے۔ایسے نظام کو مسلسل مساوات بھی کہا جاتا ہے۔
- پہلے کوئی ایک تغیر کا خارج کریں پھر نظام کو حل کرنا اخراج کا طریقہ کہلاتا ہے۔
- مندرجۂ ذیل کے تیر کے خاکے $a_1x+b_1y+c_1=0\,,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ کو اس ضربی طریقہ سے حل کرنے میں معاون ہیں۔



- ایک حقیقی عدد k کو کثیر رقمی $p(x)$ کا صفر بھی کہا جاتا ہے اگر $p(k)=0$ ہے۔

- دودرجی کثیر رقمی کے سرعدد اور صفر کے درمیان بنیادی تعلق $ax^2 + bx + c = 0$ ہو تو

$$\text{صفر کا حاصل جمع} \quad -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ کا سرعدد}}{x^2 \text{ کا سرعدد}}$$

$$\text{صفر کا حاصل ضرب} \quad \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا سرعدد}}$$

- (i) کوئی بھی کثیر رقمی $x = a$, $p(x)$ صفر ہو تو ایک اور صرف ایک $p(a)=0$ ہو گا۔
- (ii) $p(x)$ کا جزوِ ضربی $x - a$ ہو تو ایک اور صرف ایک $p(a)=0$ ہو گا۔
- دو یا دو سے زیادہ الجبرائی جملوں کا G.C.D جملوں کا اعلیٰ درجہ ہو گا جو ہر ایک بغیر باقی کے تقسیم ہو گا۔
- دو یا دو سے زیادہ الجبرائی جملوں کا L.C.M جملوں کا ادنیٰ درجہ ہو گا۔ جو ہر ایک بغیر باقی کے تقسیم ہوں گے۔
- کوئی بھی دو کثیر رقمی کے GCD اور LCM کا حاصل ضرب دو کثیر رقمی کے حاصل ضرب کے مساوی ہو گا۔
- فرض کریں $a \in R$ ایک غیر منفی حقیقی عدد ہے۔ a کا جذر المربع، حقیقی عدد b ہے۔ لہٰذا $b^2 = a$ ہو گا۔ a کے جذر المربع کو $\sqrt[2]{a}$ یا $\sqrt{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- تغیرات میں دودرجی مساوات کے x کی صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ہے۔ یہاں a, b, c ایک حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔
- دودرجی مساوات کو ان طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

  (i) اجزائے ضربی کے طریقے سے   (ii) مکمل مربع طریقے سے

  (iii) دودرجی ضابطے کو استعمال کر کے۔
- دودرجی مساوات کے جذر $ax^2 + bx + c = 0$ دیا گیا ہو تو $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، تو $b^2 - 4ac \geq 0$ حاصل ہو گا۔
- دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ہو تو

  (i) دو متفرق (distinct) حقیقی جذر اگر $b^2 - 4ac > 0$ ہو گا۔

  (ii) دو مساوی جذر اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو گا۔

  (iii) غیر حقیقی جذر اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو گا۔

کیا تم جانتے ہو ؟

فرمیٹ کا آخری مسئلہ : مساوات $x^n + y^n = z^n$ کا کوئی حل سالم عدد نہ ہو گا جب $n>2$ ہو گا۔ فرمیٹ نے لکھا کہ میں نے ایک ایسا بہترین ثبوت پیش کیا ہے جس کو بیان کرنا بہت مشکل ہے۔ 300 سالوں تک کوئی بھی اس کا حل ڈھونڈ نہیں نکال سکے جب 1994 میں برطانوی ریاضی دان **انڈریو وائلس** نے اس کو حل کیا۔ دلچسپ بات یہ ہے کہ جب وہ ہائی اسکول کے طالب علم تھے، اُس وقت انہیں اس مسئلہ کے بارے میں معلوم ہوا۔

4

میٹریس

MATRICES

"Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred" - Sylvester

- تعارف
- میٹرکس کی تشکیل
- میٹرکس کی قسمیں
- میٹرکس کی جمع، تفریق اور ضرب
- میٹرکس کی مساوات

جیمس جوسف سلوسٹر
(1814-1897)
انگلستان

انہوں نے میٹرکس کے نظریہ، متغیرات کے نظریہ، عددی نظریہ اور اتحادی نظریہ کے بنیادی نظام کے لئے بہت کام کیا۔ اس نے بتایا کہ تمام میٹرسس ایک میٹرکس میں سما سکتے ہیں۔ انہوں نے کئی حسابی اصطلاحات بنائے، جیسے "discriminant"۔ 1880ء میں رائل سوسائٹی آف لنڈن نے سلوسٹر کو کوپلے میڈل سے نوازا جو دنیا میں سب سے سائنسی تحقیقات کا سب سے بڑا ایوارڈ مانا جاتا ہے۔ 1901ء میں رائل سوسائٹی آف لنڈن نے ان کی یاد سے "سلوسٹر میڈل" حسابی تحقیقات کرنے والوں کی حوصلہ افزائی کے لئے موسوم کیا۔

4.1 تمہید

اس باب میں ہم ریاضی کے ایک اہم چیز کو "میٹرکس" کہتے ہیں، کے متعلق بحث کریں گے۔ یہاں ہم **میٹریس** کا تعارف کریں گے اور میٹرکس الجبرا کی بنیاد کا مطالعہ کریں گے۔

میٹریس کی ابتدا 18 اور 19 ویں صدی کے درمیان میں صرف ایک تصور کی طرح ہوئی۔ ابتداء میں ان کی نشو ونما یا ترقی ہندسوں کی شکلوں میں تبدیلی اور خطی مساوات کے حل کے باعث ہوئی۔ غرض اب میٹریس ریاضی کا ایک قوی آلہ ہے۔ میٹرکس بہت کارآمد ہے کیوں کہ یہ ہمیں اس قابل بناتے ہیں کہ ہم کئی اعداد کی صف بندوں کو ایک تنہا شئے کی طرح غور کرتے ہیں اور ان نشانات کے ذریعہ بہت ہی مختصر طریقہ پر محسوب کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہونے والی ریاضی کی "اختصار نویسی" (Mathematical Short Hand) بہت شستہ اور قوی ہے اور مختلف عملی مسائل کو حل کرنے کے لئے مناسب ہے۔

لفظ 'میٹرکس' کا اعداد کی ترتیب کے لئے 1850 میں **جیمس سلویسٹر** (James Sylvester) نے تعارف کرایا تھا۔ "میٹرکس" لاطینی زبان کا لفظ "رحم" کے لئے ہے اور یہ انگریزی میں اسی معنی کو برقرار رکھتا ہے۔ مزید یہ عام طور پر یہ معنی رکھتا ہے کہ کوئی جگہ یہاں کچھ بنایا یا نکالا جاتا ہے۔

آیئے اب ہم x اور y کی خطی مساواتوں پر غور کریں۔

$$3x - 2y = 4 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \qquad (2)$$

ہمیں پہلے سے پتہ ہے کہ کس طرح اخراج کے طریقے سے اس نظام کا حل (2,1) حاصل کر سکتے ہیں۔ اس کو گاسین اخراج کا طریقہ (Guassian Elimination) بھی کہتے ہیں۔ جہاں صرف ضریب استعمال ہوتے ہیں اور متغیر نہیں۔ اسی لئے طریقہ کو آسانی سے عمل میں لا سکتے ہیں اور اس طرح میٹرکس الجبرا کے استعمال سے حل حاصل کر سکتے ہیں۔

4.2 میٹریس کی ترکیب (Formation of Matrices)

آیئے ہم چند مثالوں کے طریقوں پر غور کریں جس سے میٹریس کی ترتیب دی جاتی ہے۔

کمار کے پاس 10 پن ہیں۔ ہم اس کو (10) کی طرح ظاہر کرسکتے ہیں اس فہم کے ساتھ ( ) کے اندر کا عدد کمار کے پن کی تعداد ہے۔

اب اگر کمار کے پاس 10 پن اور 7 پنسل ہیں تو ہم اس کو (10 7) کی طرح ظاہر کرسکتے ہیں اسی خیال کے ساتھ کہ ( ) کے اندر پہلا عدد پن اور دوسرا عدد پنسل ہے۔

ذیل کی اطلاعات کو دیکھئے۔

کمار اور اس کے دوست راجو اور گوپو کے پاس جو پن اور پنسل ہیں ان کو ذیل میں اس طرح دیا گیا ہے۔

کمار کے پاس 10 پن اور 7 پنسل ہیں

راجو کے پاس 8 پن اور 4 پنسل ہیں

گوپو کے پاس 6 پن اور 5 پنسل ہیں

اس کو ہم جدول میں اس طرح ترتیب دے سکتے ہیں۔

	پن	پنسل
کمار	10	7
راجو	8	4
گوپو	6	5

اس کو ہم ایک مستطیلی ترتیب سے ظاہر کرسکتے ہیں جہاں اندراج بالترتیب اشیاء کو ظاہر کرتے ہیں

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{پہلی صف} \\ \leftarrow \text{دوسری صف} \\ \leftarrow \text{تیسری صف} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{پہلی} & \text{دوسری} \\ \text{قطار} & \text{قطار} \end{array} & \end{array}$$

اسی اطلاع کو ہم ایک جدولی طریقہ میں اس طرح مرتب کرسکتے ہیں۔

	کمار	راجو	گوپو
پن	10	8	6
پنسل	7	4	5

اسی کو ہم ایک مستطیلی ترتیب میں ظاہر کرسکتے ہیں۔

$$\text{(ii)}\quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{پہلی صف} \\ \leftarrow \text{دوسری صف} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{پہلی} & \text{دوسری} & \text{تیسری} \\ \text{قطار} & \text{قطار} & \text{قطار} \end{array} & \end{array}$$

ترتیب (i) میں پہلی قطار کی اندراج بالترتیب کمار، راجو، گوپو کے پن کی تعداد کی نمائندگی کرتی ہے اور دوسری قطار بالترتیب کمار، راجو، گوپو کے پنسلوں کے تعداد کی نمائندگی کرتی ہے۔

اسی طرح ترتیب (ii) میں پہلی صف کی اندراج بالترتیب کمار، راجو، گوپو کے پن کی تعداد کی نمائندگی کرتی ہے اور دوسری صف کی اندراج بالترتیب کمار، راجو، گوپو کے پاس پنسل کی تعداد کی نمائندگی کرتی ہے۔

مندرجۂ بالاقسم کے اعداد کی ترتیب یا اظہار ''میٹرکس'' کہلاتا ہے۔

تعریف

اعداد کی مستطیلی ترتیب جو صفوں اور قطاروں میں قوسین کے اندر بند ہے میٹرکس کہلاتی ہے۔

میٹرکس کو عام طور پر ایک تنہا حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسے ...... A,B,X, Y اعداد جو میٹرکس بناتے ہیں میٹرکس کی **اندراج** یا **عناصر** کہلاتے ہیں۔ میٹرکس میں ہر افقی ترتیب اُس میٹرکس کی **صف** کہلاتی ہے۔ میٹرکس میں ہر انتصابی ترتیب اس میٹرکس کی **قطار** کہلاتی ہے۔

میٹریس کی چند مثالیں ہیں۔

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -8 & 9\\ 1 & 5 & -1\end{bmatrix} \text{ اور } C=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

4.2.1۔ میٹرکس کی عام شکل

ایک میٹرکس A جس کی m صفیں اور n قطاریں ہیں کی شکل ہے۔

جہاں A جس کی m صفیں اور n قطاریں ہیں کی شکل ہے

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

جہاں .... a_{11}, a_{12}, a_{13} میٹرکس کے عناصر ہیں اوپر کی میٹرکس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ جہاں $i=1,2,3,.......m$ اور $j=1,2,3,......,n$ یہاں i, a_{ij} ویں صف اور j ویں قطار کے میٹرکس کا عنصر ہے۔

مثال کے طور پر اگر $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 3\\ 6 & 2 & 1\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ ہوتو $a_{23}=1$ وہ عنصر جو دوسری صف اور تیسری قطار میں واقع ہے۔

اسی طرح

$$a_{11}=4,\ a_{12}=5,\ a_{13}=3,\ a_{21}=6,\ a_{22}=2,\ a_{31}=7,\ a_{32}=8 \text{ اور } a_{33}=9.$$

4.2.2 میٹرکس کا درجہ یا ابعاد (Order or Dimension of a Matrix)

اگر میٹرکس A میں m صفیں اور n قطاریں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ A کا درجہ $m\times n$ (m by n پڑھتے ہیں) ہے۔

میٹرکس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ، میٹرکس A میں دو صف اور 3 قطاریں ہیں۔ اسلئے A کا درجہ 2×3 ہے۔

غور کریں

$m \times n$ میٹرکس میں پہلا حرف m ہمیشہ صفوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور دوسرا صرف n ہمیشہ قطاروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

4.3 میٹریس کی اقسام (Types of Matrices)

آیئے ہم میٹریس کی چند اقسام سیکھیں

(i) صف میٹرکس (Row Matrix)

ایک میٹرکس کو **صف میٹرکس** کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک صف رکھتا ہے۔ مثلاً $A = (5\ \ 3\ \ 4\ \ 1)$ اور $B = (-3\ \ 0\ \ 5)$ کے درجہ 1×4 اور 1×3 بالترتیب ہیں۔

عام طور پر $A = (a_{ij})_{1\times n}$ صف میٹرکس کا درجہ $1\times n$ ہے۔

(ii) قطار میٹرکس (Column matrix)

ایک میٹرکس کو **قطار میٹرکس** کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک قطار رکھتا ہے۔

مثلاً قطار میٹرکس $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

کے درجہ 2×1 اور 3×1 بالترتیب ہیں۔

عام طور پر $A = [a_{ij}]_{m\times 1}$ قطار میٹرکس کا درجہ $m \times 1$ ہے۔

(iii) مربع میٹرکس (Square matrix)

ایک میٹرکس جس میں صفوں اور قطاروں کی تعداد مساوی ہو مربع میٹرکس کہلاتا ہے۔

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times2}$ اور $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$ بالترتیب 2 اور 3 درجہ کے مربع میٹریسیس ہیں۔

عام طور پر $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ مربع میٹرکس کا درجہ m ہے۔

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots a_{mm}$ میں موجود عناصر، میٹرکس A کے **بنیادی وتر یا اولین وتر** کے عناصر کہلاتے ہیں۔

(iv) وتر میٹرکس (Diagonal matrix)

ایک مربع میٹرکس جس میں اولیّن وتر کے اوپر اور نیچے کے تمام عناصر صفر ہوں تو وہ **وتر میٹرکس** کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ بالترتیب 2 اور 3 درجے کے وتر میٹریس ہیں۔

عام طور پر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ وتر میٹرکس کا درجہ m ہے۔ اگر $a_{ij} = 0$ تمام $i \neq j$ کیلئے۔

غور کریں

ایک وتر میٹرکس کے چند اولیّن وتر کے عناصر صفر ہو سکتے ہیں۔

(v) اسکیلر میٹرکس (Scalar matrix)

ایک وتر میٹرکس جسمیں اولیّن وتر کے عناصر مساوی ہوں اسکیلر میٹرکس کہلاتا ہے مثال کے طور پر

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ بالترتیب 2 اور 3 درجہ کے اسکیلر میٹریس ہیں

عام طور پر $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ اسکیلر میٹرکس کہلاتا ہے، اگر $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{جب } i \neq j \\ k, & \text{جب } i = j \end{cases}$ ہو۔ جس میں k اسکیلر ہے۔

(vi) اکائی میٹرکس (Unit matrix)

ایک وتر میٹرکس جس میں تمام اولیّن وتر کے اندراج 1 ہیں **اکائی میٹرکس** کہلاتا ہے۔ ایک n درجہ والے اکائی میٹرکس کو I_n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ اور $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ بالترتیب 2 اور 3 درجہ کے اکائی میٹریس ہیں۔

عام طور پر ایک مربع میٹرکس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ایک اکائی میٹرکس ہے اگر $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$

غور کریں

ایک اکائی میٹرکس کو ضرب کی بنیاد پر Identity Matrix بھی کہا جاتا ہے۔ ہر اکائی میٹرکس واضح طور پر اسکیلر میٹرکس ہے۔
یہ ضروری نہیں کہ ایک اسکیلر میٹرکس کہ ایک اکائی میٹرکس ہو۔

(vii) معدوم میٹرکس یا صفر میٹرکس (Null matrix or Zero matrix)

ایک میٹرکس معدوم میٹرکس یا صفر میٹرکس کہلاتا ہے اگر اسکے تمام عناصر '0' صفر ہیں اور اس کو 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ اور $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2×2 اور 2×3 درجہ کے معدوم میٹریس ہیں۔

غور کریں

(i) ایک صفر میٹرکس ضروری نہیں کہ ایک مربع میٹرکس ہو۔
(ii) صفر میٹرکس، اعداد میں صفر کا رول ادا کرتا ہے۔ (iii) اگر ایک درجہ صفر میٹرکس کو اسی درجہ کے میٹرکس کے ساتھ جمع یا تفریق کیا جاتا ہے تو اس میٹرکس میں کوئی تبدیلی نہیں آتی۔

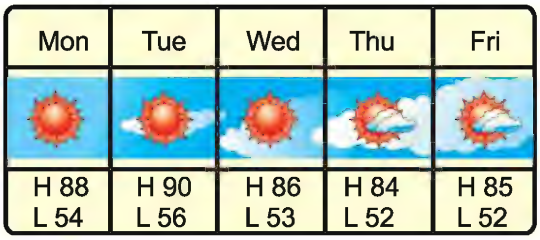
میٹرکس کا متبدّل (Transpose of a matrix) ٹرانسپوز میٹرکس

تعریف : میٹرکس A کا متبدّل، میٹرکس A کے صفوں اور قطاروں کے ردوبدل سے حاصل ہوتا ہے اور اسکو A^T متبدّل (A ٹرانسپوز یا کی طرح پڑھتے ہیں) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ہو تو $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

عام طور پر اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ہو تو $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$ جس میں $i = 1,2,\ldots n$ اور $j = 1,2,\ldots m$ کے لئے $b_{ij} = a_{ji}$ ہوگا۔

مثال 4.1 : ذیل کے جدول میں 5 دن کی موسم کی پیشین گوئی دِکھائی گئی ہے۔ جو زیادہ (H) اور کم (L) تپش کو فارن ہیٹ میں ظاہر کرتی ہے۔ تپش کی ایک میٹرکس دو جس میں پہلی اور دوسری صفیں بالترتیب زیادہ اور کم تپش کی نُمائندگی کرتی ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ کونسا دن زیادہ گرم ہوگا۔



حل : اوپر کی معلومات کا ایک میٹرکس کے طریقہ میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$A = \begin{array}{c} \\ H \\ L \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Mon} & \text{Tue} & \text{Wed} & \text{Thu} & \text{Fri} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix} \end{array}$$

یعنی

$$A = \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix}$$

پہلی صف (H) کے پڑھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ منگل کا دن سب سے زیادہ گرم ہے۔

مثال 4.2 ذیل میں ہر ایک غذائی اشیاء میں پائی جانے والی چربی، کاربوہائیڈریٹ اور پروٹین کی مقدار گرام میں دی گئی ہے۔

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4
چربی	5	0	1	10
کاربوہائیڈریٹ	0	15	6	9
پروٹین	7	1	2	8

معلومات کے استعمال سے 3 × 4 اور 4 × 3 میٹریس لکھو۔

حل : اوپر کی معلومات کو 3 × 4 میٹرکس کی طرح نُمائندگی کر سکتے ہیں

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

جہاں قطاریں غذائی اشیاء کو ظاہر کرتی ہیں۔ ہم 4 × 3 میٹرکس اس طرح لکھتے ہیں

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

جہاں صفیں غذائی اشیاء کو ظاہر کرتی ہیں۔

مثال 4.3 فرض کرو کہ

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

دریافت کیجئے (i) میٹرکس کا درجہ یا ترتیب (ii) عناصر a_{13} اور a_{42} (iii) عنصر 2 کا مقام

حل : (i) میٹرکس A میں 4 صفیں اور 3 قطاریں ہیں چنانچہ A کا درجہ 4 × 3 ہے۔

(ii) a_{13} عنصر پہلی صف اور تیسری قطار میں ہے۔ چنانچہ $a_{13} = 18$ ۔ اسی طرح $a_{42} = -2$ چوتھی صف اور دوسری قطار کا عنصر

(iii) عنصر 2 دوسری صف اور تیسری قطار میں واقع ہے۔ چنانچہ $a_{22} = 2$

مثال 4.4

2×3 درجہ والا ایک میٹرکس $A = [a_{ij}]$ بنائیے جس کے عناصر دیئے گئے ہیں۔ $a_{ij} = |2i - 3j|$

حل : عام طور پر 2×3 میٹرکس اس طرح دیا گیا ہے۔

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

اب $a_{ij} = |3i - j|$ جس میں $i = 1,2$ اور $j = 1,2,3$

$a_{11} = |2(1)-3(1)| = |-1| = 1,\ a_{12} = |2(1)-3(2)| = 4\ ,\ a_{13} = |2(1)-3(3)| = 7$

$a_{21} = [2(2)-3] = 1,\ a_{22} = |2(2)-3(2)| = 2\ ,\ a_{23} = |2(2)-9| = 5$

چنانچہ مطلوبہ میٹرکس ہے $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

مثال 4.5

اگر $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ہو تو A^T اور $(A^T)^T$ دریافت کیجئے۔

حل : $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

میٹرکس A کا ٹرانسپوز یا متبادل A^T ہے جو میٹرکس A کی صفوں اور قطاروں کے باہم رد و بدل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ $A^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

اِسی طرح $(A^T)^T$ بھی میٹرکس A^T کی صفوں اور قطاروں کے رد و بدل سے حاصل کیا جاتا ہے۔

چنانچہ $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

غور کریں

اوپر کی مثال سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $(A^T)^T = A$۔ یہ حقیقت ہے کہ کسی بھی میٹرکس B کیلئے $(B^T)^T = B$ درست ہے۔ اسی طرح کسی بھی سمتیہ (Scalar) کے لئے $(kA)^T = kA^T$

مشق 4.1

1. پانی کے کھیلوں کے پارک کیلئے داخلہ ٹکٹ کی قیمتیں ذیل کی فہرست میں دی گئی ہیں۔

	عام دنوں میں (₹)	ہفتہ کے آخر میں (چھٹیوں میں) (₹)
بڑے	400	500
بچّے	200	250
بزرگ شہری	300	400

بڑے، بچّے اور بزرگ شہریوں کیلئے داخلہ ٹکٹوں کی قیمتوں کیلئے میٹریس لکھئے۔ مزید میٹرکس کی جسامت دریافت کیجئے۔

2. ایک گاؤں میں 6 ہائرسکنڈراسکول، 8 ہائی اسکول اور 13 پرائمری اسکول ہیں ان معطیات کو 1×3 اور 3×1 درجے کے میٹریس میں ظاہر کیجئے۔

3. ذیل کے میٹریس کے درجہ لکھئے۔

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $(3 \quad 4 \quad 5)$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. اگرایک میٹرکس میں 8 عناصر ہوں تو اُس میٹرکس کے ممکن درجے کیا ہوسکتے ہیں؟

5. اگرکسی میٹرکس میں 30 عناصر ہوں تو اُس میٹرکس کے کل ممکن درجے کیا ہیں۔

6. 2×2 درجہ کا میٹرکس ترتیب دیجئے۔ $A = [a_{ij}]$ جس میں عناصر اس طرح دیئے گئے ہیں۔

(i) $a_{ij} = ij$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ (iii) $a_{ij} = \dfrac{i-j}{i+j}$

7. 2×3 درجہ کا ایک میٹرکس ترتیب دیجئے۔ $A = [a_{ij}]$ جس میں عناصر اس طرح دیئے گئے ہیں۔

(i) $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$ (ii) $a_{ij} = \dfrac{(i-2j)^2}{2}$ (iii) $a_{ij} = \dfrac{|2i-3j|}{2}$

8. اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ (i) میٹرکس کا درجہ دریافت کیجئے۔ (ii) a_{24} اور a_{32} کے عناصر لکھئے۔
(iii) عنصر 7 کس صف اور قطار میں واقع ہے ؟

9. اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ہو تو A کا ٹرانسپوز دریافت کیجئے۔

10. اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ ہو تو تصدیق کیجئے کہ $(A^T)^T = A$

4.4 میٹریس پر عمل (Operation on Matrices)

اس باب میں ہم میٹریس کی مساوات، اسکیلر (عددیہ) سے میٹرکس کی جمع، تفریق اور ضرب کے بارے میں بحث کریں گے۔

میٹرکس میں مساوات

میٹریسیس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ اور $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ کو مساوی کہا جاتا ہے اگر (i) وہ مساوی درجے کے ہوں اور (ii) A کا ہرایک عنصر B کے نظیری عنصر کے مساوی ہو یعنی $a_{ij} = b_{ij}$ تمام i اور j کیلئے

مثال کے طور پر میٹریس $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ اور $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ مساوی نہیں ہیں کیونکہ میٹریس کے درجے مختلف ہیں۔

مزید $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ اسلئے کہ نظیری عناصر مساوی نہیں ہیں۔

مثال 4.6

$x\,,\,y$ اور z کی قیمتیں معلوم کیجئے اگر $\begin{pmatrix} x & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & z \\ 5 & y & 1 \end{pmatrix}$

حل : چونکہ دیئے گئے میٹریس مساوی ہیں، انکے نظیری عناصر مساوی ہونے چاہئے۔

نظیری عناصر کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x=3$, $y=9$ اور $z = 4$

مثال 4.7

حل کیجئے : $\begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2x \\ 31+4y \end{pmatrix}$

حل : چونکہ میٹریس مساوی ہیں، ان کے نظیری عناصر بھی مساوی ہیں۔

نظیری عناصر کے موازنے سے ہم کو $y = 6-2x$ اور $3x = 31+4y$ حاصل ہوتا ہے۔ دوسری مساوات میں $y = 6-2x$ کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $3x = 31+4(6-2x)$

$$3x = 31 + 24 - 8x$$

چنانچہ $x = 5$ اور $y = 6-2(5) = -4$

$x = 5$ اور $y = -4$

میٹرکس کی اسکیلر (عددیہ) سے ضرب : (Multiplication of a matrix by a scalar)

تعریف

دیئے گئے میٹرکس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ کیلئے اور ایک اسکیلر (حقیقی عدد) k کیلئے ہم ایک نیا میٹرکس مُراد لیتے ہیں $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ جس میں تمام i اور j کیلئے $b_{ij} = ka_{ij}$

لہٰذا میٹرکس A کے ہر ایک عنصر کو اسکیلر k سے ضرب دینے پر میٹرکس B حاصل ہوتا ہے اور اس کو اس طرح لکھتے ہیں $B = kA$ ۔ میٹرکس کی اس ضرب کو اسکیلر ضرب کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ہو تو $kA = k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}$

مثال 4.8

اگر $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ ہو تو 3A دریافت کیجئے۔

حل : A کے ہر ایک عنصر کو 3 سے ضرب دینے پر میٹرکس 3A حاصل ہوتا ہے ۔

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(3) & 3(6) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -15 \end{pmatrix}$$

میٹریس کی جمع Addition of Matrices :

ذیل میں دیئے گئے میٹریس 3 لڑکے اور 3 لڑکیوں کے بالترتیب حساب اور سائنس کے اسباق میں لئے گئے مارکس دکھائے گئے ہیں۔

سائنس: $B = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \text{لڑکے} \\ \text{لڑکیاں} \end{array}$

حساب: $A = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \text{لڑکے} \\ \text{لڑکیاں} \end{array}$

ہرایک طالب علم کے کل مارکس حاصل کرنے کیلئے ہم A اور B کے نظیری اندراج کو جمع کرتے ہیں۔

$$A+B=\begin{pmatrix}45 & 72 & 81\\ 30 & 90 & 65\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}51 & 80 & 90\\ 42 & 85 & 70\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}45+51 & 72+80 & 81+90\\ 30+42 & 90+85 & 65+70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96 & 152 & 171\\ 72 & 175 & 135\end{pmatrix}$$

آخری میٹرکس سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے لڑکے کے حساب اور سائنس میں حاصل کئے گئے کُل مارکس 96 ہیں۔اسی طرح آخری لڑکی کے حساب اور سائنس میں حاصل کئے گئے کل مارکس 35 ہیں - چنانچہ ہم نے مشاہدہ کیا کہ مساوی درجہ کی دو میٹریس کا مجموعہ ایک میٹرکس ہے جو دئے ہوئے میٹریس کے نظیری اندراج کو جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

تعریف

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو مساوی درجہ کی میٹریس ہیں۔تو A اور B کا حاصل جمع میٹرکس $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ جس میں تمام i اور j کے لئے $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$۔ نوٹ کیجئے کہ میٹرس میں جمع کا مطلب صرف اعداد کی جمع ہے۔ دو میٹرس A اور B کی جمع کو A+B سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مختلف درجہ کہ میٹریس کے لئے جمع غیر واضح ہے۔

مثال 4.9

فرض کرو کہ $A=\begin{pmatrix}8 & 3 & 2\\ 5 & 9 & 1\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ A+B دریافت کیجئے اگر ممکن ہوتو۔

حل : چونکہ A کا درجہ 3×2 اور B کا درجہ 2×2 ہے A اور B میٹریس کی جمع ناممکن ہے۔

مثال 4.10

اگر $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 7\\ 2 & 8 & 2 & 3\end{pmatrix}$ ہوتو A +B دریافت کیجئے۔

حل : چونکہ A اور B مساوی درجہ 4×2 رکھتے ہیں۔ A اور B کی جمع کرسکتے ہیں۔ اسلئے

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 6 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 7\\ 2 & 8 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5+3 & 6-1 & -2+4 & 3+7\\ 1+2 & 0+8 & 4+2 & 2+3\end{pmatrix}$$

غرض $A+B=\begin{pmatrix}8 & 5 & 2 & 10\\ 3 & 8 & 6 & 5\end{pmatrix}$

منفی میٹرکس (Negative Matrix)

میٹرکس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ کے منفی میٹرکس کو $-A$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اوراس طرح تعریف کی جاتی ہے۔ $-A=(-1)A$ یعنی $-A=[b_{ij}]_{m\times n}$ جس میں تمام i اور j کیلئے $b_{ij}=-a_{ij}$

میٹریس کی تفریق (Subtraction of Matrices)

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ مساوی درجہ کے دو میٹریس ہیں تو A–B کی تعریف اس طرح ہے کہ $A-B=A+(-1)B$ یعنی $A-B=[c_{ij}]$ جس میں تمام i اور j کیلئے $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$

مثال 4.11

وزن کم کرنے کے ایک غذائی پروگرام (Diet programme) کی ابتدا میں 4 لڑکے اور 4 لڑکیوں کے وزن کلوگرام میں میٹرکس A ظاہر کرتا ہے۔ میٹرکس B غذائی پروگرام کے بعد کے اوزان دِکھاتی ہے۔

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{لڑکے} \\ \text{لڑکیاں} \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{لڑکے} \\ \text{لڑکیاں} \end{array} \end{array}$$

لڑکے اور لڑکیوں کے وزن میں ہوئی کمی کو Weight loss دریافت کیجیے۔

حل : وزن میں کمی کا میٹرکس
$$A - B = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5 میٹرکس کے جمع کی خصوصیات (Properties of a matrix Addition)

(i) میٹرکس کی جمع متبادلہ ہے (Matrix addition is Commutative)

اگر A اور B کوئی دو مساوی درجہ کے میٹریس ہیں تو A + B = B + A

(ii) میٹرکس کی جمع مربوطی ہے (Matrix addition is Associative)

اگر A،B اور C مساوی درجہ کے تین میٹریس ہوں تو A + (B+C) = (A+B)+C

(iii) جمعی متماثلث کا وجود (Existence of Addition Identity)

میٹرکس کی جمع کیلئے معدوم یا صفر میٹرکس جمع کا متماثل ہے۔ اگر A ایک m × n درجہ کا میٹرکس ہے تو A + 0 = 0 + A= A جس میں 0 ، m×n درجہ کا معدوم میٹرکس ہے۔

(iv) جمعی معکوس کی موجودگی (Existence of additive Inverse)

میٹرکس A کیلئے، B کو A کا جمعی معکوس کہا جاتا ہے اگر B+A=A+B=0۔ چونکہ A + (–A) = (–A)+A=0 ہے، –A ہی A کا جمعی معکوس ہے۔

غور کریں

کسی میٹرکس کا جمعی معکوس اس کا منفی میٹرکس ہے اور یہ شاذ و نادر ہے۔ (صرف ایک)

مشق 4.2

1. میٹرکس کی مساوات x، y اور z کی قیمتیں دریافت کیجیے۔
$$\begin{pmatrix} 5x+2 & y-4 \\ 0 & 4z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. x اور y معلوم کیجیے۔ اگر $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$

3. اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ ہو تو A کا جمعی معکوس دریافت کیجیے۔

4. فرض کرو $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ میٹرکس C دریافت کیجیے اگر C = 2A + B

.5 اگر $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ہوتو 6A – 3B معلوم کیجئے۔

.6 a اور b دریافت کیجئے اگر $a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

.7 اگر $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ اور $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ ہوتو X اور Y معلوم کرو۔

.8 اگر $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ ہوتو x اور y حل کرو۔

.9 اگر $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ اور $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ہوتو تصدیق کیجئے۔

(i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (-A) = O = (-A) + A$.

.10 اگر $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ اور $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ہوتو تصدیق کیجئے کہ $A + (B + C) = (A + B) + C$.

.11 ایک اِلکٹرانک کمپنی ان کی تین دُکانوں میں فروخت ہونے والے ہر ایک ہی قسم کے تفریحی آلہ کا ریکارڈ رکھتی ہے تاکہ وہ یہ اپنی سپلائیس (مہیا کی گئی اشیاء) کی خریداری پر نظر رکھ سکے۔ دو ہفتوں میں ان کی فروخت ذیل کی (spread sheet) جدول میں دِکھائی گئی ہے۔

		T.V.	DVD	ویڈیو گیمس	C.D پلیئر
پہلا ہفتہ	Store I	30	15	12	10
	Store II	40	20	15	15
	Store III	25	18	10	12
دوسرا ہفتہ	Store I	25	12	8	6
	Store II	32	10	10	12
	Store III	22	15	8	10

میٹرکس کے جمع کے استعمال سے دو ہفتوں میں فروخت کی گئی اشیاء کا حاصلِ جمع (مجموعہ) دریافت کیجئے۔

.12 ایک سوئیمنگ پول میں ایک دن کی داخلہ کی فیس کا خاکہ درج ذیل میں دیا گیا ہے۔

روزانہ داخلہ فیس ₹ میں		
ممبر شپ	بچے	بڑے
2.00pm سے پہلے	20	30
2.00pm کے بعد	30	40
غیر ممبر شپ		
2.00pm سے پہلے	25	35
2.00pm کے بعد	40	50

غیر ممبر شپ کیلئے زائد قیمت کی نمائندگی کرنے والی میٹرکس ترتیب دیجئے۔

4.6 میٹریس کی ضرب (Multiplication of Matrices)

فرض کرو کہ سیلوی 3 پن اور 2 پنسل خریدنا چاہتی ہے. جب کہ مینا کو 4 پن اور 5 پنسل کی ضرورت ہے۔ ہر ایک پن اور پنسل کی قیمت بالترتیب 10 ₹ اور 5 ₹ ہے۔ ہر ایک کو کتنی رقم خرچ کرنے کی ضرورت ہے؟

صاف ظاہر ہے چونکہ $3 \times 10 + 2 \times 5 = 40$ ہے، سیلوی کو 40 ₹ کی ضرورت ہے۔

چونکہ $4 \times 10 + 5 \times 5 = 65$ ، مینا کو 65 ₹ کی ضرورت ہے۔

ہم اس کو میٹرکس کی ضرب استعمال کرکے بھی معلوم کرسکتے ہیں۔ آیئے ہم اوپر کی معلومات کو ذیل کی طرح لکھیں

ضروریات	قیمت (₹)	درکار رقم (₹)
$\begin{array}{c} \text{سیلوی} \\ \text{مینا} \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \times 10 + 2 \times 5 \\ 4 \times 10 + 5 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 65 \end{pmatrix}$

فرض کرو ایک پن اور پنسل کی قیمت دوسری دُکان میں بالترتیب 8 ₹ اور 4 ₹ ہے۔ سیلوی اور مینا کیلئے ضروری رقم $3 \times 8 + 2 \times 4 =$ ₹ 32 اور ₹ 52 $= 4 \times 8 + 5 \times 4$ ہوں گے۔ مندرجۂ بالا معلومات کو اس طرح ظاہر کرسکتے ہیں۔

ضروریات	قیمت (₹)	درکار رقم (₹)
$\begin{array}{c} \text{سیلوی} \\ \text{مینا} \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\times 8 + 2\times 4 \\ 4\times 8 + 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 52 \end{pmatrix}$

اب اوپر کی معلومات دونوں حالتوں میں میٹرکس کی صورت میں ذیل کی طرح ملائی جاسکتی ہے۔

ضروریات	قیمت (₹)	درکار رقم (₹)
$\begin{array}{c} \text{سیلوی} \\ \text{مینا} \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \times 10 + 2 \times 5 & 3\times 8 + 2\times 4 \\ 4 \times 10 + 5 \times 5 & 4\times 8 + 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 32 \\ 65 & 52 \end{pmatrix}$

اوپر کی مثال سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ دو میٹریسیس کی ضرب ممکن ہے اگر پہلے میٹرکس کے قطاروں کی تعداد دوسرے میٹرکس کے صفوں کی تعداد کے مساوی ہو۔ مزید حاصلِ ضرب میٹرکس کے عناصر حاصلِ کرنیکے لیئے ہم پہلے میٹرکس کے صف اور دوسرے میٹرکس کے قطار کو لیتے ہیں۔ انکے عناصر کو بالترتیب ضرب دیتے اور جمع کرتے ہیں۔

جب حاصل ضرب واضح ہو تو کس طرح سے میٹرکس کے عناصر کی ضرب دی جاسکتی ہے، ایک مثال کے ذریعے اسے واضح کریں گے۔

اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ہو تو AB کا حاصلِ ضرب اسطرح دیا جاتا ہے۔

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

مرحلہ 1: A کی پہلی صف اور B کی پہلی قطار کے عدد سے ضرب دیجئے۔ حاصلِ ضرب کو جمع کیجئے اور نتیجہ کو AB کی پہلی صف اور پہلی قطار میں لکھئے۔

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) + (-1)5 & \\ & \end{pmatrix}$$

مرحلہ 2: A کی پہلی صف اور B کی دوسری قطار کو استعمال کرتے ہیں مرحلہ 1 کی طرح اُسی طریقہ کو اپنائیے۔ نتیجہ کو AB کی پہلی صف اور دوسری قطار میں لکھیے۔

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ & \end{pmatrix}$$

مرحلہ 3: A کی دوسری صف اور B کی پہلی قطار لے کر اُسی طریقے کو اپنائیے۔ نتیجہ کو AB کی دوسری صف اور پہلی قطار میں لکھیے۔

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & \end{pmatrix}$$

مرحلہ 4: A کی دوسری صف اور B کی دوسری قطار کیلئے بھی وہی طریقہ ہے

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix}$$

مرحلہ 5: AB حاصلِ ضرب میٹرکس حاصل کرنے کے لئے مختصر کیجئے۔

$$\begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

تعریف

اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ دو میٹریس ہو تو حاصلِ ضرب میٹرکس AB کا درجہ $m\times p$ ہوگا۔

اس کو ذیل کے خاکے میں سمجھایا گیا ہے۔

$$\underset{m\times \boxed{n\quad \text{مساوی ہونا چاہئے} \quad n}\times p}{A \qquad\qquad\qquad\qquad B}$$

حاصلِ ضرب میٹرکس AB کا درجہ $m\times p$

مثال 4.12

تعین کیجئے کہ کیا میٹرکس کا حاصل ضرب واضح ہے یا نہیں۔ اگر ضرب کیا جاسکتا ہے تو حاصلِ ضرب میٹرکس کی جسامت بیان کیجئے۔

(i) $A_{2\times 5}$ اور $B_{5\times 4}$ (ii) $A_{1\times 3}$ اور $B_{4\times 3}$

حل:

(i) اب A کے قطاروں کی تعداد اور B کے صفوں کی تعداد مساوی ہے۔

اسلئے حاصل ضرب AB کو واضح کیا جاسکتا ہے۔

مزید حاصلِ ضرب میٹرکس AB کا درجہ 2×4 ہے۔

(ii) دیا گیا ہے A کا درجہ 1×3، B کا درجہ 4×3 ہے۔ اب A کے قطاروں کی تعداد اور B کے صفوں کی تعداد مساوی نہیں ہے۔

چنانچہ AB حاصلِ ضرب میٹرکس غیر واضح ہے۔

مثال 4.13

حل کیجئے $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

حل : دیا گیا ہے کہ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

نظیری عناصر کی مساوات حاصل کرنے پر

$3x + 2y = 8$ اور $4x + 5y3 = 1$

$\Longrightarrow 3x + 2y - 8 = 0$ اور $4x + 5y - 13 = 0.$

کارتیسی ضرب سے مساوات کو حل کرنے پر ہم کو حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{cccccc} & x & & y & & 1 \\ 2 & & -8 & & 3 & & 2 \\ 5 & & -13 & & 4 & & 5 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{-26+40} = \frac{y}{-32+39} = \frac{1}{15-8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{14} = \frac{y}{7} = \frac{1}{7}$$

غرض $x = 2, \quad y = 1$

مثال 4.14

اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ اور $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ہوتو بتایئے کہ $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$

حل : فرض کرو کہ $A^2 = A \times A$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$(a+d)A = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

چنانچہ $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$

4.7 میٹرکس کے ضرب کی خصوصیات (Properties of Matrix Multiplication)

میٹرکس کی ضرب اس میں موجود اعداد کی ضرب کی بعض خصوصیات کو یونہی نہیں رکھتے۔ اس طرح کی بعض خصوصیات یہ ہیں۔

(i) $AB \neq BA$ (عام طور پر) (ii) $AB=0$ کا مطلب یہ نہیں کہ A یا B ایک صفر میٹرکس ہے اور (iii) $AB = AC$، جس میں A ایک غیر صفری میٹرکس ہے، یہ اشارہ نہیں دیتا کہ ہمیشہ $B = C$ ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر فرض کیجئے $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ تب

(i) $AB \neq BA$ (ii) $AD = 0$ ، جب کہ A اور D غیر صفری میٹرکس ہیں اور (iii) AB=AC مگر $B \neq C$

میٹرکس کے ضرب کی بعض خصوصیات کو مثالوں کے ساتھ دیکھیں گے۔

(i) میٹرکس کی ضرب متبادلہ نہیں ہے

اگر A اور B دو میٹریس ہیں اور اگر AB اور BA دونوں واضح ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ AB=BA

مثال 4.15

اگر $A=\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}$ ہو تو AB اور BA معلوم کرو، اگر وہ وجود میں آتے ہوں تو ؟

حل : میٹرکس A کی ترتیب 3×2 ہے اور میٹرکس B کی ترتیب 2×3 ہے۔ چنانچہ AB اور BA دونوں واضح ہیں۔

اسی طرح $AB=\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}72-42&-24+7&16+35\\-18+24&6-4&-4-20\\0+18&0-3&0-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&-17&51\\6&2&-24\\18&-3&-15\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}78&-69\\50&-61\end{pmatrix}$$

غور کرو کہ $AB \neq BA$

برائے ذہن نشینی

ایک ہی درجہ کے وتری میٹرکس کا حاصل ضرب متبادلہ ہوتی ہے۔

اسی طرح ایک ہی درجہ کے اکائی میٹرکس اور ایک مربع میٹرکس کا حاصل ضرب متبادلہ ہوتی ہے۔

(ii) میٹرکس کی ضرب ہمیشہ مربوطی ہے (Matrix multiplication is always associative)

کوئی تین میٹریس A,B اور C سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $(AB)C = A(BC)$۔ جب کبھی بھی مساوات کے دونوں جانبین واضح ہوں۔

(iii) میٹرکس کی ضرب جمع پر تقسیمی ہے (Matrix multiplication is distributive over addition)

کوئی تین میٹریس A,B اور C سے ہمیں حاصل ہوتا ہے (i) $A(B+C) = AB + AC$۔

(ii) $(A+B)C = AC + BC$، جب کبھی بھی مساوات کے دونوں جانبین واضح ہوں۔

مثال 4.16

اگر $C=\begin{pmatrix}1&1\\-5&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&5\\6&7\end{pmatrix}$ ، $A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}$ جانچیئے کہ $A(B+C) = AB + AC$

$$B+C=\begin{pmatrix}-2&5\\6&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6\\1&10\end{pmatrix}$$

چنانچہ
$$A(B+C)=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&6\\1&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&38\\5&34\end{pmatrix}\qquad(1)$$

اب
$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6+12 & 15+14 \\ 2+24 & -5+28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-10 & 3+6 \\ -1-20 & -1+12 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 29 \\ 26 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $A(B+C) = AB + AC$

(iv) ضربی متماثلہ کا وجود : (Existence of Multiplicative Identity)

عام الجبرا میں ہمارے پاس عدد 1 (ایک) ہے، جس کی خصوصیت ہے کہ کسی بھی عدد کے ساتھ اس کا حاصل ضرب وہی عدد ہوگا۔
اب ہم میٹرکس الجبرا میں ایک مماثل نظریہ پیش کر رہے ہیں۔
n درجہ کے کسی بھی مربع میٹرکس کیلئے ہمیں $AI = IA = A$ حاصل ہوتا ہے۔ جس میں n درجہ کا اکائی میٹرکس I ہے۔ لہٰذا I ضرب کے تحت **متماثل میٹرکس** کہلاتا ہے۔

مثال 4.17

اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ ہو تو تصدیق کیجئے $AI = IA = A$ جہاں I ایک اکائی میٹرکس ہے جس کا درجہ 2 ہے۔

حل :
اب $AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+3 \\ 9+0 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$

مزید $IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 0+9 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$

لہٰذا $AI = IA = A$.

(v) ضربی معکوس کا وجود (Existence of multiplicative Inverse)

اگر A ، n درجہ کا مربع میٹرکس ہے اور اگر اُسی درجہ n کا ایک مربع میٹرکس B اس طرح ہو کہ $AB = BA = I$، جس میں I ایک اکائی میٹرکس ہے جس کا درجہ n ہے تو B کو میٹرکس A کا ضربی معکوس کہا جاتا ہے اور اس کو A^{-1} سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

غور کریں

(i) بعض مربع میٹرکس جیسے $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ میں ضربی معکوس موجود نہیں ہوتا۔
(ii) اگر B ضربی معکوس ہے A کا تو A ضربی معکوس ہے B کا
(iii) اگر مربع میٹرکس کا ضربی معکوس وجود میں آتا ہوں تو یہ شاز و نادر (کبھی کبھار) ہی واقع ہوگا۔

مثال 4.18

ثابت کیجئے کہ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ اور $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ میٹرکس کی ضرب کے تحت ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

حل : اب $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

مزید $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

چنانچہ دیئے گئے میٹریس میٹرکس کی ضرب کے تحت ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

(vi) ٹرانسپوز میٹریس کیلئے اُلٹا اصول (Reversal law for Transpose of Matrices)

اگر A اور B دو میٹریس ہیں اور اگر AB واضح ہے تو $(AB)^T = B^T A^T$

مثال 4.19

اگر $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ اور $B = (1 \ \ 3 \ \ -6)$ ہوتو جانچئے کہ $(AB)^T = B^T A^T$

حل :

اب $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}(1 \ \ 3 \ \ -6) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{pmatrix}$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$B^T A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}(-2 \ \ 4 \ \ 5) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $(AB)^T = B^T A^T$

مشق 4.3

1. معلوم کیجئے کہ کیا ہر ایک حالت میں میٹریس کی ضرب واضح ہے ؟ اگر ایسا ہے تو حاصل ضرب میٹرکس کا درجہ بیان کیجئے۔

(i) AB, جہاں $A= [a_{ij}]_{4\times3}$, $B= [b_{ij}]_{3x2}$ (ii) PQ, جہاں $P= [p_{ij}]_{4\times3}$, $Q= [q_{ij}]_{4x3}$

(iii) MN, جہاں $M= [m_{ij}]_{3\times1}$, $N= [n_{ij}]_{1x5}$ (iv) RS, جہاں $R= [r_{ij}]_{2\times2}$, $S= [s_{ij}]_{2x2}$

2. میٹریس کی ضرب اگر موجود ہو تو دریافت کیجئے۔

(i) $(2 \ \ -1)\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}(2 \ \ -7)$

3. ایک پھل فروش اُس کی تین دُکانوں میں پھل فروخت کرتا ہے۔ سیب، آم اور سنترے کی قیمت فروخت بالترتیب 20 ₹، 10 ₹ اور 5 ₹ ہے۔ ذیل میں 3 دِنوں کی فروخت دی گئی ہے۔

دن	سیب	آم	سنترے
1	50	60	30
2	40	70	20
3	60	40	10

ہر ایک دن جمع کی گئی کل رقم ظاہر کرنے کے لئے میٹرکس لکھئے۔ تینوں پھلوں کی کُل فروخت میٹرکس میں دریافت کیجئے اور تینوں پھلوں کو مِلا کر فروخت کرنے پر کُل جمع کی گئی رقم دریافت کیجئے۔

4. x اور y کی قیمتیں دریافت کیجئے اگر $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.

5. اگر $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ اور $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ اور اگر $AX = C$ ہو تو x اور y کی قیمتیں دریافت کیجئے۔

6. اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ہو تو دِکھائیے کہ $A^2 - 4A + 5I_2 = 0$

7. اگر $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ہو AB اور BA دریافت کیجئے۔ کیا یہ مساوی ہیں ؟

8. اگر $C = (2 \quad 1)$ اور $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ہو تو تصدیق کیجئے $(AB)\,C = A(BC)$

9. اگر $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ہو تو تصدیق کیجئے $(AB)^T = B^T A^T$

10. ثابت کرو کہ $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ میٹرکس کی ضرب کے تحت ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

11. حل کیجئے $(x \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = (\,0\,)$.

12. اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ہو تو ثابت کیجئے $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

13. اگر $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, اور $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ اور $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ تو $(A+B)C$ اور $AC + BC$ معلوم کرو۔
کیا یہ اس طرح ہیں؟ $(A+B)C = AC + BC$

مشق 4.4

.1 ذیل کا کونسا بیان درست نہیں ہے۔

(A) اسکیلر میٹرکس ایک مربع میٹرکس ہے۔ (B) ایک وتر میٹرکس ایک مربع میٹرکس ہے۔

(C) ایک اسکیلر میٹرکس وتر میٹرکس ہے۔ (D) ایک وتر میٹرکس ایک اسکیلر میٹرکس ہے۔

-2 میٹرکس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ایک مربع میٹرکس ہے اگر

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = 1$ (D) $m = n$

.3 اگر $\begin{pmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ ہوتو x اور y کی قیمتیں بالترتیب

(A) $-2, 7$ (B) $-\frac{1}{3}, 7$ (C) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ (D) $2, -7$

.4 اگر $A = (1 \ -2 \ 3)$ اور $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ہوتو A+B

(A) $(0 \ 0 \ 0)$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) (-14) (D) واضح نہیں ہے

.5 اگر ایک میٹرکس کا درجہ 2×3 ہے تو میٹرکس میں عناصر کی تعداد ہے۔

(A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

.6 اگر $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ x & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ہوتو x کی قیمت ہے۔

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

-7 اگر میٹرکس A کا درجہ 3×4 ہے اور میٹرکس B کا درجہ 4×3 ہوتو میٹرکس BA کا درجہ

(A) 3×3 (B) 4×4 (C) 4×3 (D) غیر واضح

8 اگر $A \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ \ 2)$ تو A کا درجہ

(A) 2×1 (B) 2×2 (C) 1×2 (D) 3×2

.9 اگر A اور B مربع میٹریس اسطرح ہیں کہ $AB = I$ اور $BA = I$ ہوتو B ہے

(A) اکائی میٹرکس (B) معدوم میٹرکس (C) A کا ضربی معکوس میٹرکس (D) $-A$

.10 اگر $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ہوتو x اور y کی قیمتیں بالترتیب ہیں

(A) $2, 0$ (B) $0, 2$ (C) $0, -2$ (D) $1, 1$

11. اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ اور $A + B = 0$ ہوتو B ہے۔

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. اگر $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ ہوتو A^2 ہے۔

(A) $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. A کی ترتیب (درجہ) $m \times n$ اور B کی ترتیب $p \times q$ ہے۔A اور B کی جمع تبھی ممکن ہے اگر

(A) $m = p$ (B) $n = q$ (C) $n = p$ (D) $m = p, n = q$

14. اگر $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ہوتو a کی قیمت ہے۔

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 11

15. اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ اس طرح ہے کہ $A^2=I$ ہے، تب

(A) $1 + a^2 + bc = 0$ (B) $1 - a^2 + bc = 0$

(C) $1 - a^2 - bc = 0$ (D) $1 + a^2 - bc = 0$

16. اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ اور $A= a_{ij} = i + j$ ہوتو، $A =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ہوتو a,b, c اور d کی بالترتیب قیمتیں اس طرح ہیں

(A) $-1, 0, 0, -1$ (B) $1, 0, 0, 1$ (C) $-1, 0, 1, 0$ (D) $1, 0, 0, 0$

18. اگر $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ اور $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ہوتو میٹرکس B ہے۔

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

19. اگر $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$ ہوتو x کی قیمت ہے۔

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

20. ایک ہی درجہ کے کوئی دو مربع میٹریس کیلئے مندرجہ ذیل کونسی مساوات درست ہے۔

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(A^T B^T) = A^T B^T$ (C) $(AB)^T = BA$ (D) $(AB)^T = B^T A^T$

نکات برائے یادداشت

⌘ میٹرکس اعداد کی ایک مستطیلی ترتیب ہے۔

⌘ ایک میٹرکس جس کی m صفیں اور n قطاریں ہوں کا درجہ $m \times n$ ہے۔

⌘ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ایک صف میٹرکس ہے اگر $m = 1$ ہے۔

⌘ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ایک قطار میٹرکس ہے اگر $n = 1$ ہے۔

⌘ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ایک مربع میٹرکس ہے اگر $m = n$ ہے۔

⌘ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ایک وتر میٹرکس ہے اگر $a_{ij} = 0$ جہاں $i \neq j$

⌘ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ایک اسکیلر میٹرکس ہے اگر $a_{ij} = 0$ جہاں $i \neq j$ اور $a_{ij} = k$ ، جب $i = j$ (k ایک غیر صفر مستقل ہے)

⌘ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ اکائی میٹرکس ہے اگر $a_{ij} = 1$ جہاں $i = j$ اور $a_{ij} = 0$ جبکہ $i \neq j$

⌘ اگر میٹرکس کے تمام عناصر صفر ہیں تو اسے صفر میٹرکس کہا جاتا ہے۔

⌘ دو میٹریس A اور B مساوی ہیں اگر A اور B مساوی درجہ کے ہیں اور نظیری اندراج مساوی ہیں۔

⌘ میٹرکس کی جمع متبادلہ ہے۔یعنی $A+B = B+A$ ، اگر A اور B مساوی درجہ کے میٹریس ہیں۔

⌘ میٹرکس کی جمع مربوطی ہے۔یعنی $(A+B) + C = A+ (B+C)$ اگر A,B اور C مساوی درجہ کے میٹریس ہیں۔

⌘ اگر میٹرکس A کا درجہ $m \times n$ ہو اور میٹرکس B کا درجہ $n \times p$ ہو تو اس کا حاصل ضرب میٹرکس AB کا درجہ $m \times p$ ہوگا۔

⌘ عام طور پر میٹرکس کی ضرب متبادلہ نہیں ہے۔یعنی $AB \neq BA$

⌘ میٹرکس کی ضرب مربوطی ہے۔یعنی $(AB)\,C = A\,(BC)$ ، اگر دونوں جانبین واضح ہوں۔

⌘ $(AB)^T = B^T.A^T$ اور $(A^T)^T = A,\ (A+B)^T = A^T + B^T$

⌘ A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں اگر $AB = BA = 1$

⌘ اگر $AB = 0$ تو ضروری نہیں کہ $A = 0$ یا $B = 0$ ہو۔

کیا تم جانتے ہو؟

ایبل انعام پہلی بار 2003 میں دیا گیا جس کی مالیت ایک ملین US ڈالر ہے۔ یہ ایک عالمی انعام ہے جسے ناروجین اکیڈمی آف سائنس عطا کرتی ہے اور اسے ناروے کے بادشاہ ہر سال ایک یا ایک سے زیادہ بہترین ریاضی دانوں کو ادا کرتے ہیں۔

2007ء میں چنئی میں پیدا ہوئے ایک امریکی-ہندوستانی شہری ایس.آر.سرینی واسا وردھن کو امکان کے نظریہ اور خاص کر وسیع انحراف کے ایک جامع نظریہ کے لئے ایبل انعام سے نوازا گیا۔

5

محددوں کا علم ہندسہ (تحلیلی علم ہندسہ)
COORDINATE GEOMETRY

No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically - Leonardo de Vinci

- تعارف
- نسبت کا ضابطہ
- مثلث اور چار ضلعی کا رقبہ
- خط مستقیم

5.1 تعارف

محددوں کا علم ہندسہ، جسے تحلیلی علم ہندسہ بھی کہا جاتا ہے، محددی نظام اور الجبرا کے اصول اور تجزیہ کو استعمال کر کے اس کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ اس سے ہمیں الجبریائی نتیجوں کو علم ہندسہ کی مدد سے سمجھنے اور الجبرا اور علم ہندسہ میں رابطہ پیدا کرنے میں معاون ثابت ہوتا ہے۔ الجبرا کو استعمال کر کے علم ہندسہ کا بتدریج مطالعہ فرانسیسی فلاسفی اور ریاضی دان رینے ڈسکارٹے (Rene Descartes) نے انجام دیا۔ محددوں کا استعمال علم ریاضی میں ڈسکارٹے کا ایک عظیم عطیہ ہے جو علم ہندسہ کے مطالعہ میں ایک انقلاب پیدا کیا۔ اس نے اپنی کتاب 'لاجیومٹری' (La Geometry) 1637 میں شائع کیا۔ اس کتاب میں اس نے علم ہندسہ کے مسئلوں کو الجبریائی مساوات میں تبدیل کیا۔ پھر اس کو مختصر کرنے کے بعد اس مساوات کا حل ہندسی طریقہ پر پیش کیا۔ اس اثناء میں فرانسیسی ریاضی دان پیری ڈی لمیٹ (Pierre De lemat) نے محددی علم ہندسہ کو تشکیل دینا شروع کیا اور اس میدان میں اس نے اپنا نمایاں حصہ ادا کیا۔ 1692 میں جرمنی کے ریاضی دان گاٹ فیلڈ وِلھم وان لیبے نڈز (Gottfield wilhelm Von Lebinitz) نے تحلیلی علم ہندسہ میں جدید اصطلاح جیسے ابسسا (abscissa) اور معین (ordinate) کا تعارف کرایا۔

پیری ڈی فرمٹ
(1601-1665)
فرانس

رینے ڈسکارٹس اور فرمٹ 17ویں صدی کی پہلی نصف کے دو عظیم ریاضی دان تھے۔ انہوں نے تحلیلی علم ہندسہ کے بنیادی اصولوں کی تشکیل دی۔ انہوں نے منحنی خطوط کے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے معین معلوم کرنے کا اصلی طریقہ دریافت کیا۔

انہوں نے تحلیلی علم ہندسہ پر کئی نمایاں عطیات پیش کئے ہیں۔ فرمٹ کی تحلیلی علم ہندسہ کے بارے میں 1636 میں تحریری شکل میں ڈسکارٹس کی تصنیف ''لاجیومٹری'' سے قبل ہی اشاعت ہو چکی تھی۔

ہم نویں جماعت میں تحلیلی علم ہندسہ کے بنیادی نظریے جیسے محددی محورات، مسطح، مسطح میں نقطوں کو مرتسم کرنا اور دو نقاط کے درمیان فاصلہ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ اس باب میں ہم نسبت کا ضابطہ، مثلث کا رقبہ، میلان اور خطِ مستقیم کی مساوات کے بارے میں مطالعہ کریں گے۔

5.2 نسبت کا ضابطہ :

ذیل کے مسئلہ پر غور کیجئے۔

فرض کرو A اور B دو شہر ہیں۔ فرض کرا یک شخص A سے B کی جانب 60 کلومیٹر مشرقی سمت اور پھر 30 کلومیٹر شمالی سمت ہوتے ہوئے پہنچتا ہے اگر ایک ٹیلیفون کمپنی ایک موصولاتی مینار

P پر قائم کرنا چاہیے جو شہر A اور B کو ملانے والی خط کو 1:2 کی نسبت میں تقسیم کرتی ہے۔ ہمیں نقطہ P کا مقام معلوم کرنا ہے جہاں موصولاتی مینار کو قائم کرنا ہے۔

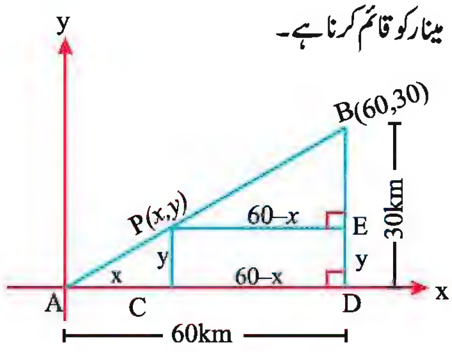


Fig. 5.1

نقطہ A کو مبداء (origin) کے طور پر منتخب کرو۔ فرض کرو (x,y) ایک نقطہ ہے۔
P اور B سے x محور پر عمود کھینچو جو بالترتیب C اور D پر ملتے ہیں۔ P سے BD پر بھی ایک عمود کھینچو جو E پر قطع کرتا ہے۔

چونکہ ΔPAC اور ΔBPE متشابہ ہیں۔ اس لئے

$$\frac{AC}{PE} = \frac{PC}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

اب

$$\frac{AC}{PE} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{60-x} = \frac{1}{2}$$

$$2x = 60 - x$$

اس طرح $x = 20.$

اس کے علاوہ

$$\frac{PC}{BE} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{y}{30-y} = \frac{1}{2}$$

اس طرح $2y = 30 - y \Longrightarrow y = 10.$

موصولاتی مینار کا مقام p(20,10) ہے۔

اوپر کے مسئلہ کو نمونے کے طور پر لیتے ہوئے ہم عام **نسبت کا ضابطہ** اخذ کریں گے۔

فرض کرو $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ دو مختلف نقاط ہیں اس طرح کہ نقطہ p(x,y)، AB کو اندرونی جانب $l:m$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ یعنی

$$\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$

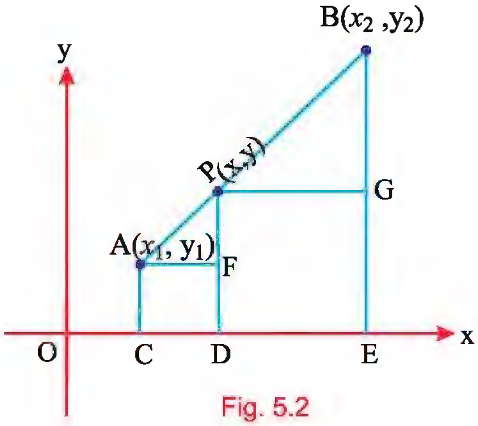


Fig. 5.2

خاکہ 5.2 سے ظاہر ہے کہ

$$AF = CD = OD - OC = x - x_1$$

$$PG = DE = OE - OD = x_2 - x$$

$$PF = PD - FD = y - y_1$$

اس کے علاوہ

$$BG = BE - GE = y_2 - y$$

یہاں ΔAFP اور ΔPGB مشابہ مثلثیں ہیں۔

چنانچہ

$$\frac{AF}{PG} = \frac{PF}{BG} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$

$$\therefore \quad \frac{AF}{PG} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow mx - mx_1 = lx_2 - lx$$

$$lx + mx = lx_2 + mx_1$$

$$\Longrightarrow x = \frac{lx_2 + mx_1}{l+m}$$

اور

$$\frac{PF}{BG} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow my - my_1 = ly_2 - ly$$

$$ly + my = ly_2 + my_1$$

$$\Longrightarrow y = \frac{ly_2 + my_1}{l+m}$$

نقطہ P جونقاط $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ کوملانے والے قطاع خط کو $l:m$ کی نسبت میں اندرونی جانب تقسیم کرتا ہے۔

$$P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m}, \frac{ly_2+my_1}{l+m}\right)$$

اس ضابطہ کو نسبت کا ضابطہ کہتے ہیں۔

یہ صاف ظاہر ہے کہ نسبت کا ضابطہ اس وقت استعمال کر سکتے ہیں جب کہ تینوں نقاط ہم خط ہوں۔

نتائج (Results)

(i) اگر نقاط $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ کو ملانے والے قطاع خط AB کو نقطہ P بیرونی جانب $l : m$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو نقطہ P $\left(\frac{lx_2-mx_1}{l-m}, \frac{ly_2-my_1}{l-m}\right)$ ہے۔ ایسی صورت میں $\frac{l}{m}$ منفی ہوتا ہے۔

(ii) اگر AB کا وسطی نقطہ M ہو تو قطاع خط AB کو M اندرونی جانب 1 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

ضابطہ میں $l=1$ اور m=1 اندراج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

AB کا وسطی نقطہ بطورِ M $\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$.

دونقاط $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ کا ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہے۔

(iii) مثلث کا ہندسی مرکز (centroid)

فرض کرو کہ Δ ABC کے راسیں (vertices) $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ہیں۔ فرض کرو، BE، AD اور CF، ΔABC کے خطوط وسطی ہیں۔

ہمیں معلوم ہے کہ کسی مثلث کے خطوطِ وسطی ہندسی مرکز پر متراکز (concurrent) ہوتے ہیں۔ اور نقطہ تراکز ہندسی مرکز ہے۔

فرض کرو ΔABC کا ہندسی مرکز $G(x,y)$ ہے۔

اب BC کا وسطی نقطہ D $\left(\frac{(x_2+x_3)}{2}, \frac{(y_2+y_3)}{2}\right)$

مثلث کی خاصیت کے تحت ہندسی مرکز G، خطِ وسطی AD کو اندرونی جانب 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

$\therefore$ نسبت کے ضابطہ کے تحت ہندسی مرکز

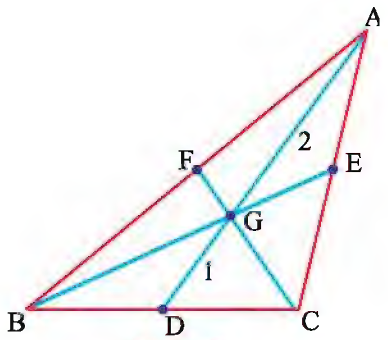


Fig. 5.3

$$G(x,y) = G\left(\frac{2\frac{(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1}, \frac{2\frac{(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right)$$

$$= G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

(x_1,y_1) ، (x_2,y_2) اور (x_3, y_3) راسیں رکھنے والے مثلث کا **ہندسی مرکز** $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ہے۔

مثال 5.1

نقاط (3,0) اور (-1,4) کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ معلوم کرو۔

حل : نقاط (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ

$$M(x\,,\,y) = M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

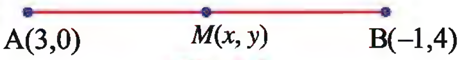


Fig. 5.4

$\therefore$ نقاط (3,0) اور (-1,4) کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ

$$M(x\,,\,y) = M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(1,2).$$

مثال 5.2

نقاط (3, 5) اور (8,10) کو ملانے والی قطاع خط کو اندرونی جانب 2:3 کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ معلوم کرو۔

حل : فرض کرو A(3, 5) اور B(8, 10) دیے گئے نقاط ہوں۔

فرض کرو $P\ (x, y)$ خط AB کو اندرونی جانب 2 : 3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

نسبت کے ضابطہ کے تحت

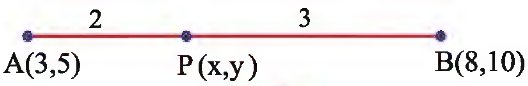


Fig. 5.5

$$P(x\,,\,y) = P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m}, \frac{ly_2+my_1}{l+m}\right)$$

یہاں $x_1 = 3, y_1 = 5, x_2 = 8\,, y_2 = 10$ اور $l = 2, m = 3$

$$\therefore \qquad P(x\,,\,y) = P\left(\frac{2(8)+3(3)}{2+3}\,,\, \frac{2(D\,)+3\,(\,5)}{2+3}\right) = P(5\,,\,7)$$

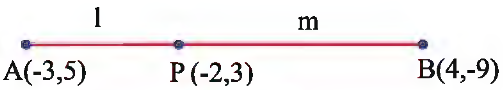
مثال 5.3

نقاط A(−3, 5) اور B(4, −9) کو ملانے والے قطاع خط کو نقطہ P(−2, 3) اندرونی جانب کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟

حل : دیے گئے نقاط A(−3, 5) اور B(4, −9) ہیں۔

فرض کرو P(−2, 3)، خط AB کو اندرونی جانب $l : m$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

نسبت کے ضابطے تحت



(1)
Fig. 5.6

$$P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m}, \frac{ly_2+my_1}{l+m}\right) = P(-2,\,3)$$

یہاں $x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = -9\,.$

$$(1) \Longrightarrow \left(\frac{l(4)+m(-3)}{l+m}, \frac{l(-9)+m(5)}{l+m}\right) = (-2, 3)$$

x محددوں کومساوی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{4l-3m}{l+m} = -2$$

$$\Longrightarrow \quad 6l = m$$

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{6}$$

یعنی $l : m = 1 : 6$

لہٰذا AB کونقطہ P اندرونی جانب 1:6 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

غور کریں

(i) اوپر کی مثال میں y-محددوں کو مساوی کرنے پر بھی نسبت حاصل ہوتا ہے۔

(ii) x-محددوں کو مساوی کرنے پر اور y-محددوں کو مساوی کرنے پر حاصل ہونے والی نسبت مساوی ہوگی جب کہ تینوں نقاط ہم خط ہوں۔

(ii) اگر ایک نقطہ، قطاع خط کو اندرون جانب $l{:}m$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے، تو $\frac{l}{m}$ مثبت ہوگا۔

(iii) اگر ایک نقطہ، قطاع خط کو بیرونی جانب $l{:}m$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ تو $\frac{l}{m}$ منفی ہوگا۔

مثال 5.4

(4, –1) اور (–2, –3) نقاط کو ملانے والے قطاع خط کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنے والے نقاط معلوم کرو۔

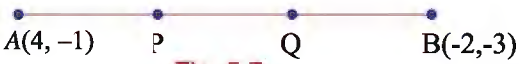


Fig. 5.7

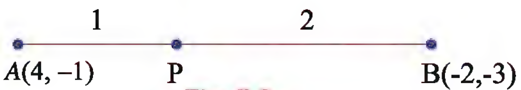


Fig. 5.8

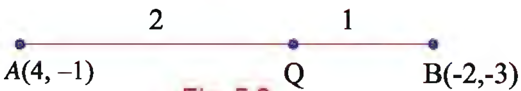


Fig. 5.9

حل : فرض کرو کہ دیے گئے نقاط A(4, –1) اور B(–2, –3) ہیں۔

فرض کرو $A(x, y)$ اور B(a, b) تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنے والے نقاط ہیں

جو AB کو اس طرح سے تقسیم کرتے ہیں کہ AP = PQ = QB

یہاں نقطہ P ، AB کو 1:2 کی نسبت میں اندرونی جانب تقسیم کرتا ہے۔

اور نقطہ Q، AB کو 2:1 کی نسبت میں اندرونی جانب تقسیم کرتا ہے۔

نسبت کے ضابطہ کے تحت مطلوبہ نقاط حسب ذیل ہیں۔

$$P\left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right) \quad \text{اور}$$

$$Q\left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1}, \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$$

$$\Longrightarrow P(x,y) = P\left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right) \quad \text{اور} \quad Q(a,b) = Q\left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3}\right)$$

$$= P\left(2, -\frac{5}{3}\right) \qquad = Q\left(0, -\frac{7}{3}\right)$$

نوٹ کریں کہ PB کا درمیانی نقطہ Q اور AQ کا درمیانی نقطہ P ہے۔

مثال 5.5

ایک مثلث کا ہندسی مرکز معلوم کرو جس کے راس (6−, 4)A، (2−, 3)B اور (2 ,5)C ہیں۔

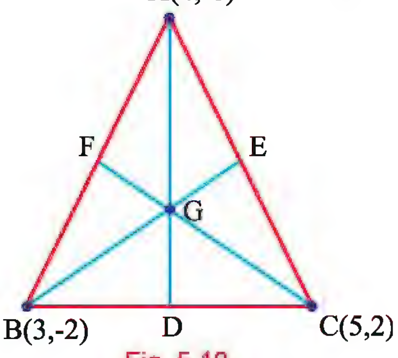


Fig. 5.10

حل : (x_1, y_1)، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) راسیں رکھنے والے مثلث کا ہندسی مرکز $G(x, y)$ کا ضابطہ

$$G(x\,,\,y) = G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

یہاں $(x_1, y_1) = (4, -6)$, $(x_2, y_2) = (3, -2)$, $(x_3, y_3) = (5\,,\,2)$,

$\therefore$ $(4\,,-6)$, $(3, -2)$ اور $(5\,,\,2)$ راسیں رکھنے والے مثلث کا ہندسی مرکز۔

$$G(x\,,\,y) = \;G\left(\frac{4+3+5}{3}, \frac{-6-2+2}{3}\right)$$
$$= \;G(4, -2)\,.$$

مثال 5.6

اگر (3 ,7)، (1 ,6) ، (2 ,8) اور (P, 4) ترتیب وار ایک متوازی الاضلاع کے راسیں ہوں تو P کی قیمت معلوم کرو۔

حل : فرض کرو متوازی الاضلاع کے راسیں (3 ,7)A ، (1 ,6) B ، (2 ,8)C اور (p, 4)D ہیں۔

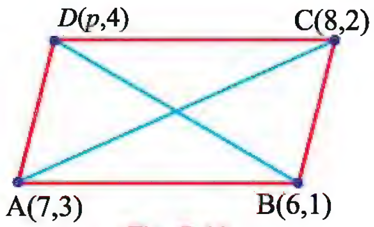


Fig. 5.11

$\therefore$ ہمیں معلوم ہے کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

وتر AC کا وسطی نقطہ وتر BD کا وسطی نقطہ ایک دوسرے سے مل جاتے ہیں۔

لہذا $\quad\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+p}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{6+p}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

x محددوں کو مساوی کرنے پر $\quad \frac{6+p}{2} = \frac{15}{2}$

$$\therefore\; p = 9$$

مثال 5.7

اگر (0 ,4)A اور (6 ,0)B کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ C

ہو اور O مبداء ہو تو ثابت کرو کہ C، ΔOAB کے تمام راسوں سے ہم فاصلہ (equidistant) ہے۔

حل : AB کا وسطی نقطہ $= C\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = C(2, 3)$

ہم جانتے ہیں کہ نقاط $P\,(x_1,y_1)$ اور $Q\,(x_2,y_2)$ کا درمیانی فاصلہ $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. ہے۔

(0 ,0)O اور (3 ,2)C کا درمیانی فاصلہ

$$OC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}\,.$$

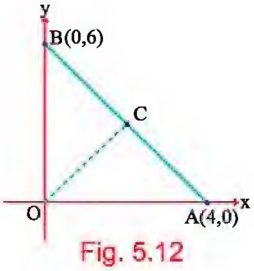


Fig. 5.12

A (4,0) اور C (2,3) کا درمیانی فاصلہ

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

B(0, 6) اور C(2, 3) کا درمیانی فاصلہ

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\therefore \quad OC = AC = BC$$

∴ نقطہ C ، مثلث ABC کے تمام راسوں سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

غور کریں

مثلث قائمۃ الزاویہ OAB کے وتر کا درمیانی نقطہ C ہی اس مثلث کا حائط مرکز ہے۔

مشق 5.1

1. ذیل کے نقطوں کو ملانے والے قطاعِ خط کا وسطی نقطہ معلوم کرو

(i) (1, –1) اور (–5, 3) (ii) (0,0) اور (0, 4)

2. مثلث کا ہندسی مرکز معلوم کرو جس کے راس مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) (1, 3) ، (2, 7) اور (12, –16) (ii) (3, –5) ، (–7, 4) اور (10, – 2)

3. ایک دائرہ کا مرکز (–6, 4) پر ہے۔ اگر دائرہ کے قطر کی ایک حد مبداء پر ہو تو دوسری حد معلوم کرو۔

4. اگر ایک مثلث کا ہندسی مرکز (1, 3) پر ہو اور اس کے دو راس (–7, 6) اور (8, 5) ہوں تو مثلث کا تیسرا راس معلوم کرو۔

5. نسبت کے ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ نقاط A (1, 0) ، B (5, 3) ، C (2, 7) اور D (– 2, 4)
بالترتیب ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

6. (3 , 4) اور (–6 , 2) نقاط کو ملانے والے قطاعِ خط کو بیرونی جانب 3:2 کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا محدّد
معلوم کرو۔

7. (–3, 5) اور (4, –9) نقاط کو ملانے والے قطاعِ خط کو اندرونی جانب 6 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا
محدّد معلوم کرو۔

8. فرض کرو کہ دو نقاط A (– 6, –5) اور B (–6, 4) ، خط AB پر ایک نقطہ P , $AP = \frac{2}{9}$ AB کی شرط پوری
کرتا ہو تو نقطہ P معلوم کرو۔

9. A (2, – 2) اور B (– 7, 4) کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط معلوم کرو۔

10. A (– 4, 0) اور B (0, 6) کو چار مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط معلوم کرو

11. (6, 4) اور (1, – 7) نقطوں کو ملانے والی قطاعِ خط کو x محور کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے ؟

12. (– 5, 1) اور (2, 3) نقطوں کو ملانے والی قطاعِ خط کو y محور کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے ؟ نقطۂ تقاطع بھی معلوم کرو۔

13. کسی مثلث کے راس (1, – 1) ، (0, 4) اور (– 5, 3) ہیں۔ اس کی خطوطِ وسطی کے طول معلوم کرو۔

5.3 مثلث کا رقبہ

ہم پچھلی جماعتوں میں سیکھ چکے ہیں کہ کس طرح چند دی ہوئی پیمائشوں کی مدد سے مثلث کا رقبہ معلوم کیا جاتا ہے۔اب یہ معلوم کرنا ہے کہ اگر مثلث کے راس کے محدّ ادد ی گئی ہوں تو کیا ہم مثلث کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں ؟

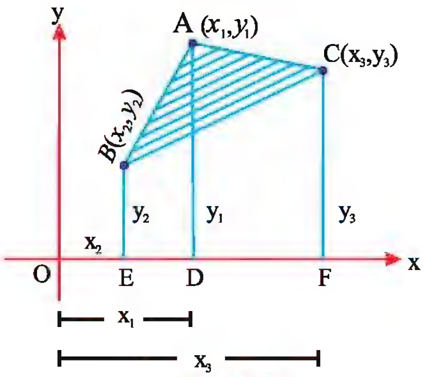


Fig. 5.13

فرض کرو ABC ایک مثلث ہے جس کے راس $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ہیں۔

x محور کے عمود میں AD ، BE اور CF ، خطوط کھینچو۔

خاکے سے $ED = x_1 - x_2$, $DF = x_3 - x_1$ اور $EF = x_3 - x_2$.

مثلث ABC کا رقبہ = معین ABEF کا رقبہ

+ معین ADFC کا رقبہ

− معین BEFC کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}(BE + AD)ED + \frac{1}{2}(AD + CF)DF - \frac{1}{2}(BE + CF)EF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3\}$$

$\therefore$ ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$.sq.units.

> اگر $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ مثلث ABC کے راس ہوں تو، ΔABC کا رقبہ
>
> $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ مربع اکائیاں

غور کریں

مثلث کے رقبہ کو اس طرح بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\}$ مربع اکائیاں

یا

$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$ مربع اکائیاں

ذیل کے تصویری اظہار کے ذریعے مندرجہ بالا ضابطہ کا لکھنا بہت آسان ہو جاتا ہے۔

مثلث ABC کے $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ کو گھڑی کی مخالف سمت لیتے ہوئے ذیل کے بتائے ہوئے طریقے پر قطاروں کی شکل میں لکھنے سے

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{Bmatrix}$$

وتروں کے حاصل ضرب x_1y_2 ، x_2y_3 اور x_3y_1 کو جمع کرو جیسا کہ گہرے تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حاصل ضرب x_2y_1 , x_3y_2 اور x_1y_3 کو بھی جمع کرو جیسا کہ نقطہ والے تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔ پھر ان کو تفریق کرنے پر عبارت $\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$ حاصل ہوتی ہے۔

غور کریں

مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ذیل کے مرحلے کارآمد ثابت ہو سکتے ہیں۔

(i) خام خاکہ پر نقاط کو مرتسم کرو۔

(ii) راسوں کو گھڑی کی مخالف سمت میں لیں ورنہ ضابطہ سے ہمیں منفی قیمت حاصل ہوگی۔

(iii) ضابطہ کو استعمال کرو۔ $\Delta ABC = \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$ کا رقبہ

5.4 تین نقاط کا ہم خط ہونا

تین یا تین سے زیادہ نقاط ہم خط اس وقت کہلاتے ہیں جب کہ وہ ایک ہی خطِ مستقیم پر واقع ہوں۔

دوسرے الفاظ میں ، تین نقاط $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ہم خط ہوتے ہیں اگر ان میں سے کوئی ایک نقطہ دوسرے دو نقطوں کو ملانے والی خطِ مستقیم پر واقع ہو۔

فرض کرو کہ تین نقاط $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ہم خط ہیں۔ یہ ایک مثلث نہیں بنا سکتے۔

اس لئے مثلث ABC کا رقبہ صفر ہے۔

یعنی $\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} = 0$

$$\Longrightarrow \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$$

ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اس کا برعکس (Converse) بھی صحیح ہے۔

لہٰذا ΔABC کا رقبہ 0 ہے۔ اگر صرف اور صرف نقاط A ، B اور C ہم خط ہوں۔

5.5 چار ضلعی کا رقبہ

فرض کرو چار ضلعی ABCD کے راس $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ ، $C(x_3, y_3)$ اور $D(x_4, y_4)$ ہیں۔

چار ضلعی ABCD کا رقبہ = ΔABC کا رقبہ + ΔABC کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\}$$
$$+ \frac{1}{2}\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\}$$

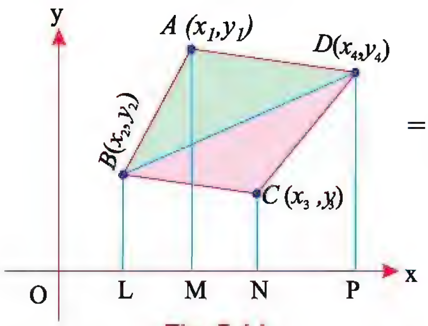


Fig. 5.14

$\therefore$ چار ضلعی ABCD کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

(یا)

$\frac{1}{2}\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\}$ مربع اکائیاں

ذیل کے تصویری اظہار سے مندرجہ بالا ضابطہ کا لکھنا بہت آسان ہو جاتا ہے۔

راس $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ ، $C(x_3, y_3)$ اور $D(x_4, y_4)$ کو گھڑی کی مخالف سمت لیتے ہوئے ذیل کے بتلائے ہوئے طریقے پر قطار وار لکھیں جیسا کہ ہم نے مثلث کا رقبہ معلوم کرتے وقت لکھا تھا۔

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{bmatrix}.$$

اس سے ہمیں مطلوبہ عبارت (expression) حاصل کرنے میں مدد ملتی ہے۔

$$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}.$$

مثال 5.8

مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (1, 2) ، (– 3, 4) اور (– 5, – 6) ہیں۔

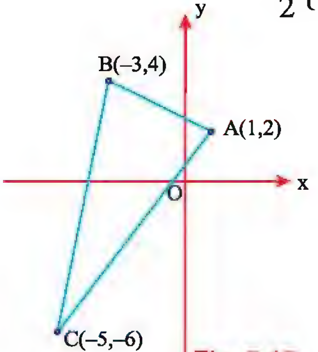


Fig. 5.15

حل : خام خاکہ میں نقطوں کو مرتسم کرو اور ان کو ترتیب میں لو۔

فرض کرو کہ راس A (1, 2) ، B (– 3, 4) اور C (– 5, – 6) ہیں۔

مثلث ABC کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(4 + 18 - 10) - (-6 - 20 - 6)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{12 + 32\} = 22.$$ مربع اکائیاں

استعمال کرو $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

مثال 5.9

اگر ΔABC کا رقبہ 68 مربع اکائیاں ہوں اور اس کے راس A (6, 7) ، B (– 4, 1) اور C (a, – 9) ترتیب وار ہوں تو a کی قیمت معلوم کرو۔

حل : مثلث ABC کا رقبہ

$$\frac{1}{2}\{(6 + 36 + 7a) - (-28 + a - 54)\} = 68$$

$$\Longrightarrow (42 + 7a) - (a - 82) = 136$$

$$\Longrightarrow 6a = 12 \qquad \therefore \quad a = 2$$

استعمال کرو $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 & a & 6 \\ 7 & 1 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

مثال 5.10

ثابت کرو کہ نقاط A (2, 3) ، B (4, 0) اور C (6, – 3) ہم خط ہیں۔

حل : مثلث ABC کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\{(0 - 12 + 18) - (12 + 0 - 6)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{6 - 6\} = 0.$$

چنانچہ دیئے گئے نقاط ہم خط ہیں۔

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ استعمال کرو

مثال 5.11

اگر نقاط $(a, 0)$ اور $(0, b)$ کو ملانے والے قطاع خط پر ایک نقطہ $P(x, y)$ ہو تو مثلث کے رقبہ کا ضابطے استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ جس میں $a, b \neq 0$.

حل : یہاں نقاط (x, y) ، $(a, 0)$ اور $(0, b)$ ہم خط ہیں۔

چنانچہ ان سے حاصل ہونے والے مثلث کا رقبہ صفر ہے

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a & 0 & x & a \\ 0 & b & y & 0 \end{Bmatrix}$$

استعمال کرو

$$\Longrightarrow \quad ab - bx - ay = 0$$

$$\therefore \quad bx + ay = ab$$

دونوں جانب ab سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$ جس میں $a, b \neq 0$

مثال 5.12

نقاط $(-4, -2)$ ، $(-3, -5)$ ، $(3, -2)$ اور $(2, 3)$ سے بننے والے چار ضلعی معلوم کرو

حل :

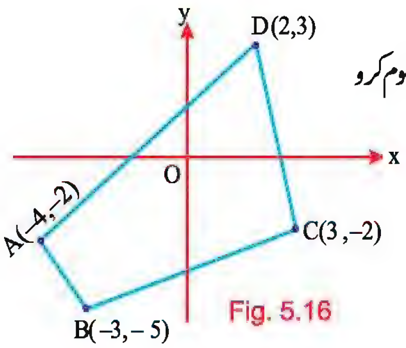


Fig. 5.16

پہلے ان نقاط کو خام خاکے پر مرتسم کیا جائے اور راسوں کو گھڑی کی مخالف سمت سے لیا جائے۔

فرض کرو کہ راس

$A(-4, -2)$ ، $B(-3, -5)$ ، $C(3, -2)$ اور $D(2, 3)$ ہیں.

چار ضلعی ABCD کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\{(20 + 6 + 9 - 4) - (6 - 15 - 4 - 12)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{31 + 25\} = 28$$ مربع اکائیاں

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & -2 & 3 & -2 \end{Bmatrix}$$

استعمال کرو

مشق 5.2

1. ذیل کے نقاط سے بننے والے مثلث کا رقبہ دریافت کرو

(i) $(0, 0)$ ، $(3, 0)$ اور $(0, 2)$ (ii) $(5, 2)$ ، $(3, -5)$ اور $(-5, -1)$

(iii) $(-4, -5)$ ، $(4, 5)$ اور $(-1, -6)$

2. مثلث کے راس ترتیب وار ہیں اور ان کے رقبے دئے گئے ہیں۔ ہر ایک میں a کی قیمت معلوم کرو۔

	راسیں	(مربع اکائیوں میں) رقبے
(i)	$(0,0)$ ، $(4, a)$ ، $(6, 4)$	17
(ii)	(a, a) ، $(4, 5)$ ، $(6, -1)$	9
(iii)	$(a, -3)$ ، $(3, a)$ ، $(-1, 5)$	12

3۔ معلوم کرو کہ ذیل کے نقاط ہم خط ہیں یا نہیں۔

(i) $(4, 3)$ ، $(1, 2)$ اور $(-2, 1)$ (ii) $(-2, -2)$ ، $(-6, -2)$ اور $(-2, 2)$

(iii) $(-3/2, 3)$ ، $(6, -2)$ اور $(-3, 4)$

4. ذیل کے نقاط ہم خط ہیں۔ k کی قیمت معلوم کرو

(i) $(k, -1)$ ، $(2, 1)$ اور $(4, 5)$ (ii) $(2, -5)$ ، $(3, -4)$ اور $(9, k)$

(iii) (k, k) ، $(2, 3)$ اور $(4, -1)$

5. چار ضلعی کا رقبہ معلوم کرو جن کے راسیں حسب ذیل ہیں

(i) $(6, 9)$ ، $(7, 4)$ ، $(4, 2)$ اور $(3, 7)$ (ii) $(-3, 4)$ ، $(-5, -6)$ ، $(4, -1)$ اور $(1, 2)$

(iii) $(-4, 5)$ ، $(0, 7)$ ، $(5, -5)$ اور $(-4, -2)$

6. اگر تین نقاط $(h, 0)$ ، (a, b) اور $(0, k)$ ایک خط پر ہوں تو مثلث کے رقبہ کے ضابطہ کو استعمال کر کے ثابت کرو کہ $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$
جہاں h اور $k \neq 0$ ہے

7. کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے سے جو مثالث بنتا ہے، اس کا رقبہ معلوم کرو۔ مثلث کے راس $(0, -1)$ ، $(2, 1)$ اور $(0, 3)$ ہیں۔ درمیانی نقطوں کو ملانے والے مثلث اور دیئے گئے مثلث کے رقبوں کی نسبت معلوم کرو۔

5.6 خطِ مستقیم

5.6.1 زاویۂ میلان (Angle of inclination)

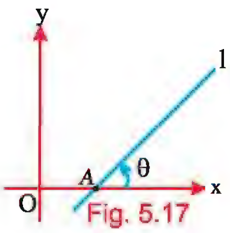


Fig. 5.17

فرض کرو ایک خطِ مستقیم l ، x محور کو A پر قطع کرتا ہے۔
مثبت x محور اور خط l کے درمیان گھڑی کے مخالف سمت پیمائش کیا جانے والے زاویے کو خطِ مستقیم l کا زاویۂ میلان کہتے ہیں۔

غور کریں

اگر خطِ مستقیم l کا زاویۂ میلان θ ہو تو

(i) $0° \leq \theta \leq 180°$

(ii) افقی خطوط کے لئے $\theta = 0°$ یا $180°$ اور عمودی خطوط کے لئے $\theta = 90°$

(iii) ایک خطِ مستقیم ابتداء میں x محور پر ہو اور ایک ثابت نقطہ A پر گھڑی کے مخالف سمت گھومنا شروع کرتا ہے اور آخر میں x محور سے مل جاتا ہے تو ابتدائی مقام پر خطِ مستقیم کا زاویۂ میلان $0°$ اور اختتامی مقام پر خطِ مستقیم کا زاویۂ میلان $180°$ ہے۔

5.6.2 خطِ مستقیم کا میلان

تعریف

ایک غیر عمودی خطِ مستقیم l کا زاویۂ میلان اگر θ ہو تو $\tan\theta$ کو میلان (slope) یا ڈھلان (gradient) کہتے ہیں اور اس کو m سے ظاہر کیا جاتا ہے

$\therefore$ خطِ مستقیم کا میلان $m = \tan\theta$

جہاں $\theta \neq 90°$ $0° \leq \theta \leq 180°$

غور کریں

(i) اس طرح x محور کا میلان یا x محور کے متوازی خط کا میلان 0 ہے۔

(ii) y محور کا میلان یا y محور کے متوازی خط کے میلان کی توضیح نہیں کی گئی ہے، کیونکہ $\tan 90°$ کی توضیح نہیں کی گئی ہے
چنانچہ جب ہم ایک خطِ مستقیم کے میلان کی بات کرتے ہیں تو اس کا مطلب یہ ہے وہ ایک غیر عمودی خطِ مستقیم ہوگا۔

(iii) اگر θ زاویہ حادّہ ہو تو میلان مثبت ہوگا اور θ منفرجہ ہو تو میلان منفی ہوگا۔

5.6.3 ایک خطِ مستقیم کا میلان جب کہ اس پر کوئی دو نقاط دیے گئے ہوں

فرض کرو کہ خطِ مستقیم l پر کوئی دو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ ہیں جس کا زاویہ میلان θ ہے۔

یہاں $0° \leq \theta \leq 180°$ $\theta \neq 90°$

یہاں فرض کرو خطِ مستقیم AB ، x محور کو C پر قطع کرتا ہے

اب خطِ مستقیم l کا میلان

$$m = \tan\theta \quad \text{............}(1)$$

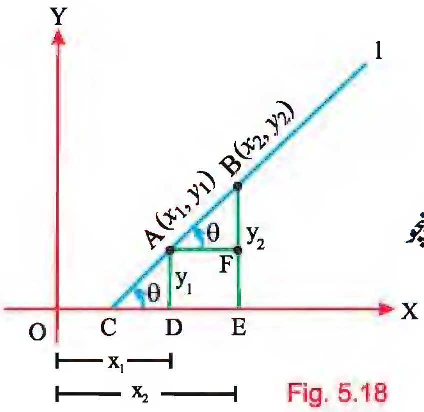


Fig. 5.18

x محور کے عمودی AD اور BE کھینچو اور A سے BE پر عمودی خط AF کھینچو

خاکہ سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$AF = DE = OE - OD = x_2 - x_1$$

اور $$BF = BE - EF = BE - AD = y_2 - y_1$$

مزید ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$$\underline{/DCA} = \underline{/FAB} = \theta$$

قائمۃ الزاویہ ΔABF سے اگر $x_1 \neq x_2$

$$\tan\theta = \frac{BF}{AF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{............}(2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں میلان حاصل ہوتا ہے۔ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والی خطِ مستقیم کا میلان $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$
جس میں $x_1 \neq x_2$ جیسا کہ $\theta \neq 90°$ ہے

غور کریں

میلان $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{x \text{ محددوں کا فرق}}{y \text{ محددوں کا فرق}}$

5.6.4 میلان کے لحاظ سے متوازی خطوط کی شرط

متوازی خطوط l_1 اور l_2 کو دیکھئے جن کے زاویہ میلان بالترتیب θ_1 اور θ_2 ہیں اور میلان m_1 اور m_2 ہیں۔

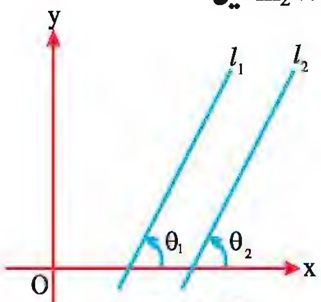


Fig. 5.19

چونکہ l_1 اور l_2 متوازی ہیں ، ان کے زاویہ مائل θ_1 اور θ_2 مساوی ہیں۔

$$\therefore \quad \tan\theta_1 = \tan\theta_2 \implies m_1 = m_2$$

$\therefore$ اگر دو غیر عمودی خط متوازی ہوں تو ان کے میلان مساوی ہوں گے۔

اس کا برعکس بھی صحیح ہے،

یعنی اگر میلان مساوی ہوں تو دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

5.6.5 میلان کے لحاظ سے عمودی خطوط کی شرط

فرض کرو l_1 اور l_2 دو عمودی خطِ مستقیم ہیں جو بالترتیب دو نقاط $A\,(x_1, y_1)$ اور $B\,(x_2, y_2)$ سے گذرتے ہیں۔

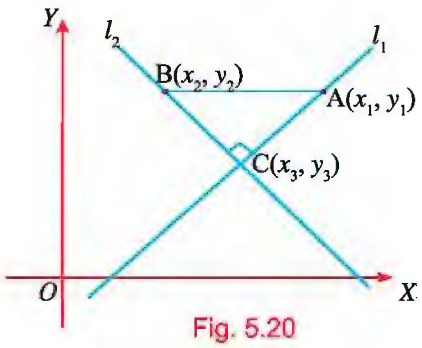


Fig. 5.20

فرض کرو ان کے میلان m_1 اور m_2 ہیں۔

فرض کرو $C\,(x_3, y_3)$ ان کا نقطۂ تقاطع ہے۔

خطِ مستقیم l_1 کا میلان $\quad m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

خطِ مستقیم l_2 کا میلان $\quad m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

مثلثِ قائمۃ الزاویہ ABC میں

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\implies (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies (x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = 0$$

$$\implies (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1$$

$$\implies m_1 m_2 = -1 \qquad \text{یا} \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

اگر میلان m_1 اور m_2 رکھنے والے دو غیر عمودی خطوط ایک دوسرے کے عمودی ہوں تو $m_1 m_2 = -1$

اس کے برخلاف اگر $m_1 m_2 = -1$ ہو تو دونوں خطوطِ مستقیم ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

غور کریں

خطِ مستقیم x محور اور y محور ایک دوسرے کے عمودی ہیں لیکن شرط $m_1m_2 = -1$ ان کے لئے صحیح نہیں ہے کیوں کہ x محور کا میلان صفر ہے اور y محور کا میلان غیر واضح ہے۔

مثال 5.13

خطِ مستقیم کا زاویہ میلان معلوم کرو جس کا میلان $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے۔

حل : اگر خطِ مستقیم کا میلان θ ہو تو، خط کا میلان $m = \tan\theta$ جس میں $0° \le \theta \le 180°,\ \theta \neq 90°$.

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = 30°$$

مثال 5.14

خطِ مستقیم کا میلان معلوم کرو اگر زاویہ میلان $45°$ ہے۔

حل : اگر خطِ مستقیم کا زاویہ میلان θ ہو تو میلان $m = \tan\theta$ ہے

دیا گیا ہے.

$$m = \tan 45° \implies m = 1.$$

مثال 5.15

نقاط $(3, -2)$ اور $(-1, 4)$ سے گزرنے والی خطِ مستقیم کا میلان معلوم کرو۔

حل : (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) نقطوں سے گزرنے والی خطِ مستقیم کا میلان ، $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore$ $(3, -2)$ اور $(-1, 4)$ نقطوں سے گزرنے والی خطِ مستقیم کا میلان

$$m = \frac{4 + 2}{-1 - 3} = -\frac{3}{2}.$$

مثال 5.16

میلان کے نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ نقاط $A\,(5, -2)$ ، $B\,(4, -1)$ اور $C\,(1, 2)$ ہم خط ہیں۔

حل :

نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے خط کا میلان $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ہے۔

$A\,(5, -2)$ اور $B\,(4, -1)$ کو ملانے والے خط AB کا میلان ، $m_1 = \frac{-1 + 2}{4 - 5} = -1$

$B\,(4, -1)$ اور $C\,(1, 2)$ کو ملانے والے خط BC کا میلان ، $m_2 = \frac{2 + 1}{1 - 4} = -1$

لہٰذا AB کا میلان $=$ BC کا میلان

اور B مشترک نقطہ بھی ہے

$\therefore$ A ، B اور C ہم خط ہیں۔

مثال 5.17

میلان کونظریہ کواستعمال کرکے ثابت کروکہ نقاط (1 – ,2 –) ، (0 ,4) ، (3 ,3) اور (2 ,3 –) ترتیب سے لینے پر ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے۔

حل : فرض کرو A (– 2, – 1) ، B (4, 0) ، C (3, 3) اور D (– 3, 2) ترتیب وار لئے گئے ہیں

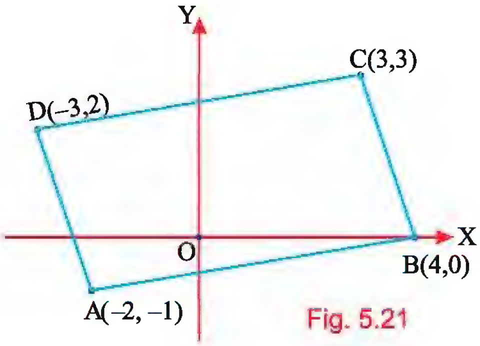


Fig. 5.21

$$\text{AB کا میلان} = \frac{0+1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{CD کا میلان} = \frac{2-3}{-3-3} = \frac{1}{6}$$

AB کا میلان = CD کا میلان

لہٰذا AB اور CD متوازی ہیں .... (1)

$$\text{BC کا میلان} = \frac{3-0}{3-4} = -3$$

$$\text{AD کا میلان} = \frac{2+1}{-3+2} = -3$$

BC کا میلان = AD کا میلان

لہٰذا BC اور AD متوازی ہیں .... (2)

(1) اور (2) سے ثابت ہوتا ہے کہ ABCD کے مقابل کے اضلاع متوازی ہیں

∴ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے

مثال 5.18

ΔABC کے راسیں A (1, 2) ، B (– 4, 5) اور C (0, 1) ہیں تو مثلث کے ارتقاع کا میلان معلوم کرو۔

حل : فرض کرو AD ، BE اور CF مثلث ABC کے ارتقاع ہیں

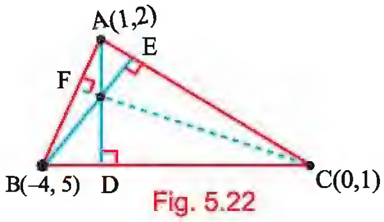


Fig. 5.22

$$\text{BC کا میلان} = \frac{1-5}{0+4} = -1$$

چونکہ ارتقاع AD ، BC کے عمودی ہے

AD کا میلان $= 1$ $\quad \because m_1 m_2 = -1$

$$\text{AC کا میلان} = \frac{1-2}{0-1} = 1$$

$\because \; BE \perp AC$

لہٰذا

BE کا میلان $= -1$

اس کے علاوہ

$$\text{AB کا میلان} = \frac{5-2}{-4-1} = -\frac{3}{5}$$

∴ CF کا میلان $= \dfrac{5}{3}$ $\quad \because \; CF \perp AB$

مشق 5.3

1. خطِ مستقیم کے زاویہ مائل معلوم کرو جن کے میلان

(i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0

2. خطِ مستقیم کے میلان معلوم کرو جن کے زاویہ میلان

(i) $30°$ (ii) $60°$ (iii) $90°$

3. ذیل کے نقاط سے گزرنے والی خطِ مستقیم کا میلان معلوم کرو

(i) $(3, -2)$ اور $(7, 2)$ (ii) $(2, -4)$ اور مبتداء (iii) $(1 + \sqrt{3}, \ 2)$ اور $(3 + \sqrt{3}, 4)$

4. ذیل کے نقاط سے گزرنے والی خطِ مستقیم کے زاویہ میلان معلوم کرو

(i) $(1, 2)$ اور $(2, 3)$ (ii) $(3, \sqrt{3})$ اور $(0, 0)$ (iii) (a, b) اور $(-a, -b)$

5. اس خط کا میلان معلوم کرو جو مبداء سے گزرتے ہوئے نقاط $(0, -4)$ اور $(8, 0)$ کو ملانے والی قطاع خط کے وسطی نقطہ سے گزرتی ہے۔

6. مربع ABCD کا ضلع AB ، x محور کے متوازی ہے۔ذیل کو معلوم کرو

(i) AB کا میلان (ii) BC کا میلان (iii) وتر AC کا میلان

7. ایک مثلث مساوی الاضلاع ABC کا ضلع BC ، x محور کے متوازی ہے۔AB کا میلان معلوم کرو اور BC کا میلان معلوم کرو۔

8. میلان کے نظریہ کو استعمال کر کے ثابت کرو کہ ذیل کے نقاط ہم خط ہیں

(i) $(2, 3)$ ، $(3, -1)$ اور $(4, -5)$ (ii) $(4, 1)$ ، $(-2, -3)$ اور $(-5, -5)$

(iii) $(4, 4)$ ، $(-2, 6)$ اور $(1, 5)$

9. اگر نقاط $(a, 1)$ ، $(1, 2)$ اور $(0, b + 1)$ ہم خط ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

10. $A(-2, 3)$ اور $B(a, 5)$ کو ملانے والی خط اور $C(0, 5)$ اور $D(-2, 1)$ نقطوں کو ملانے والی خط کے متوازی ہو تو a کی قیمت معلوم کرو۔

11. نقاط $A(0, 5)$ اور $B(4, 2)$ کو ملانے والی خط اور $C(-1, -2)$ اور $D(5, b)$ کو ملانے والی خط کے عمودی ہو تو b کی قیمت معلوم کرو۔

12. ΔABC کے راس $A(1, 8)$ ، $B(-2, 4)$ ، $C(8, -5)$ ہیں اگر AB اور AC کے وسطی نقاط بالترتیب M اور N ہوں تو MN کا میلان معلوم کرو اور تصدیق کرو کہ MN اور BC متوازی ہیں۔

13. ایک مثلث کے راس $(6, 7)$ ، $(2, -9)$ اور $(-4, 1)$ ہیں۔اس کے خطوطِ وسطی کے میلان معلوم کرو۔

14. ΔABC کی راسیں $A(-5, 7)$ ، $B(-4, -5)$ اور $C(4, 5)$ ہیں۔اس مثلث کے ارتفاعوں کے میلان معلوم کرو۔

15. میلان کے نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ راسیں $(1, 2)$ ، $(-2, 2)$ ، $(-4, -3)$ اور $(-1, -3)$ کو ترتیب سے لینے پر ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے۔

16. ثابت کرو کہ چار ضلعی جس کے راس $A(-2, -4)$ ، $B(5, -1)$ ، $C(6, 4)$ اور $D(-1, 1)$ ترتیب سے لینے پر مقابل کے اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

5.6.6 خطِ مستقیم کی مساوات

فرض کرو ایک سطح پر ایک خطِ مستقیم L ہے۔ متغیرات (variables) x اور y میں پہلے درجہ کی مساوات $px + qy + r = 0$ جو کسی نقطہ کے x محدّد اور y محدّد کی شرط کو پوری کرتی ہے۔ خط L پر اس مساوات کی شرط پوری کرنے والی x اور y کی کوئی بھی قیمت اس محدد کا ایک نقطہ مانی جائے گی۔ اس لئے یہ مساوات خط L کی مساوات کہلاتی ہے۔ اب ہم اس خط L کو الجبریائی مساوات کے طور پر ظاہر کریں گے۔

خط L ذیل کے کسی بھی شکل میں ہوگا۔

(i) افقی خط (ii) عمودی خط (iii) نہ افقی اور نہ عمودی

(i) افقی خط فرض کرو L ایک افقی خط ہے۔

تب L ہی x محور ہوگا یا L ، x محور کے علاوہ دوسرا افقی خط ہوگا

صورت (a)

اگر L ، x محور ہو تو نقطہ $L'(x, y)$ پر ہوگا جب کہ صرف اور صرف $y = 0$ اور x ایک حقیقی عدد ہو۔

اس طرح $y = 0$ ، x محور کی نمائندگی کرتا ہے۔

$\therefore$ x محور کی مساوات $y = 0$ ہے۔

صورت (b) x محور کے علاوہ L ایک افقی خط ہے۔

یعنی L ، x محور کے متوازی ہے۔

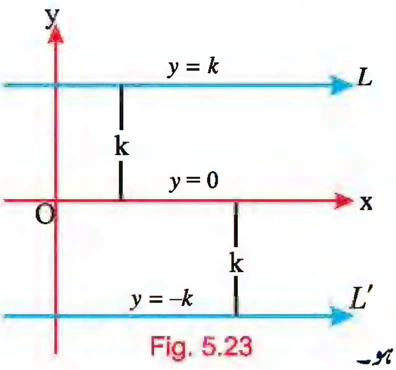


Fig. 5.23

اب نقطہ (x, y) ، L پر ہوتا ہے اگر صرف اور صرف y محدّد ایک مستقل رقم (constant) ہو اور x کوئی بھی ایک حقیقی عدد (Real number) ہو۔

$\therefore$ x محور کے متوازی خط کی مساوات $y = k$ ہے۔ جہاں k ایک مستقل رقم ہے۔

نوٹ کیجئے کہ اگر $k > 0$ ہو تو خط L ، x محور کے اوپر ہوگا اور اگر $k < 0$ ہو تو L ، x محور کے نیچے ہوگا اور اگر $k = 0$ ہو تو L ہی x محور ہوگا۔

(ii) عمودی خط فرض کرو کہ L ایک عمودی خط ہے۔

تب L ہی y محور ہے یا L ، y محور کے علاوہ عمودی خط ہے۔

صورت (a)

اگر L ، y محورہوتوسطح پرنقطہ $L\ (x, y)$ پرہوگا جب کہ صرف اورصرف $x = 0$ اور y کوئی حقیقی عدد ہوگا۔

اس طرح $x = 0$ ، y محورکی ظاہرکرتا ہے۔

$\therefore$ y محورکی مساوات $x = 0$ ہے۔

صورت (b)

اگر L ، y محورکےعلاوہ عمودی خط ہوتووہ y محورکےمتوازی ہوگا۔

اب ایک نقطہ (x, y) ، L پرہوگا اگرصرف اورصرف x محدّدکوایک مستقل رقم ہونا چاہئے اور y کوئی حقیقی عدد ہوسکتا ہے۔

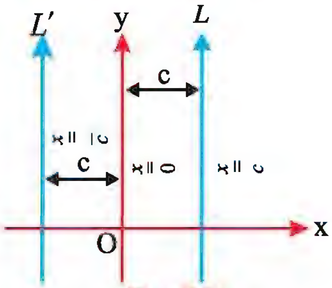


Fig. 5.24

$\therefore$ y محورکےمتوازی خط کی مساوات $x = c$ ہے۔جہاں c ایک مستقل رقم ہے۔

نوٹ کروکہ
اگر $c > 0$ ہوتو L ، y محورکےدائیں جانب ہوگا
اگر $c < 0$ ہوتو L ، y محورکےبائیں جانب ہوگا
اگر $c = 0$ ہوتو L صرف y محورہوگا

(iii) فرض کروکہ L نہ عمودی ہےاورنہ افقی۔

اس صورت میں L کوہم مساوات کی شکل میں کس طرح ظاہرکریں گے؟ فرض کرو زاویۂ میلان θ ظاہرکرتا ہے۔

غورکروکہ اگرہمیں θ معلوم ہو L پرکاایک نقطہ معلوم ہوتوہم آسانی کےساتھ 'L' کوظاہرکرسکتے ہیں۔

غیرعمودی خط L کامیلان اس طرح محسوب کرسکتے ہیں۔

(i) اگرہمیں زاویۂ میلان معلوم ہوتو $m = \tan\theta$

(ii) اگرہمیں L پرواقع دومختلف نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) معلوم ہوں تب $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(iii) اگرصرف اورصرف L افقی ہوتو $m=0$

اب اس حالت پرغورکریں جب کہ L ایک عمودی خط نہ ہو توخطِ مستقیم کی مساوات کودرج ذیل شکلوں سےحاصل کرسکتے ہیں۔

(a) میلان-نقطہ کی شکل میں (b) دونقطوں کی شکل میں

(c) میلان-مقطوعہ کی شکل میں (d) مقطوعات کی شکل میں

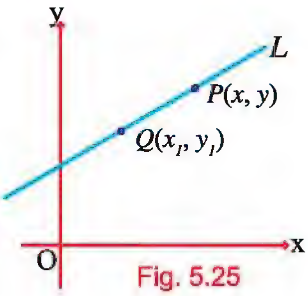


Fig. 5.25

(a) میلان ۔ نقطہ کی شکل (slope - point form)

فرض کرو L کامیلان m ہےاور $Q\ (x_1, y_1)$ ایک نقطہ L پرہے۔

فرض کرو L پر Q کےعلاوہ ایک اورنقطہ $P\ (x, y)$ ہو۔ تب مساوات اس طرح ہوگی

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow m(x - x_1) = y - y_1$$

اس طرح وہ خط جس کامیلان m ہواوروہ (x_1, y_1) سےگزرتا ہو، اس کی مساوات

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

ہے جو L پرتمام نقطوں (x, y) کےلئے ہے۔

برائے ذہن نشینی

(i) متغیرات x اور y میں پہلے درجہ کی مساوات (1) کسی بھی نقطہ کے x محدّد اور y محدّد کو مطمئن کرتی ہے جو اس خط L پر ہوتا ہے۔ x اور y کی کوئی بھی قیمت جو اس مساوات کی شرط پوری کرتی ہے، خط L پر اس نقطہ کے محدد ہوں گے۔
لہٰذا مساوات (1) خطِ مستقیم L کی مساوات کہلاتی ہے۔

(ii) مساوات (1) یہ ظاہر کرتی ہے کہ L پر ایک نقطہ کی y محدّد کا فرق ، x محدّد کے فرق کا بالرّاست تناسب ہوتا ہے تناسب کا مستقلہ رقم 'm' میلان ہے۔

(b) دو نقاط کی شکل (Two - point form)

فرض کرو غیر عمودی خط L پر دو مختلف نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) دیے گئے ہوں
L کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہم پہلے L کا میلان معلوم کرتے ہیں۔
اور پھر (1) استعمال کرتے ہیں

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ L کا میلان

جہاں پر $x_2 \neq x_1$ کیوں کہ L غیر عمودی ہے۔

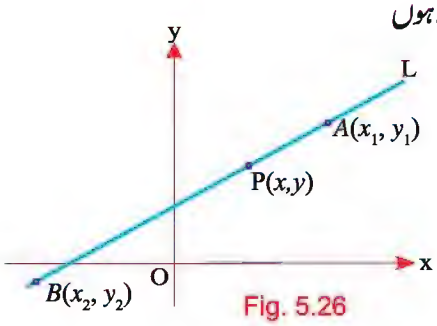


Fig. 5.26

اب ضابطہ (1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ L پر تمام نقطے (x, y) کے لئے ...... (2)

غور کریں

L کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہم نقطہ (x_1, y_1) کی بجائے (x_2, y_2) بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

(c) میلان - مقطوعہ کی شکل (Slope - intercept form)

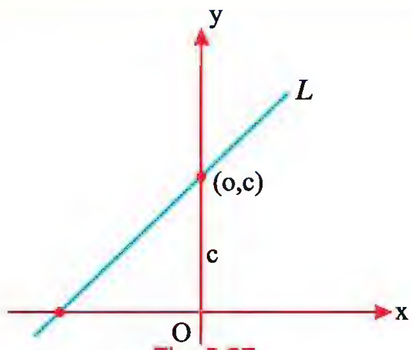


Fig. 5.27

فرض کرو L کا میلان m ، اور L کا y مقطوعہ 'c' ہے۔
چونکہ 'c' y مقطوعہ ہے، نقطہ L (0, c) پر واقع ہے
اب (1) کو $(x_1, y_1) = (0 , c)$ کے ساتھ استعمال کرنے پر
ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے : $y - c = m(x - 0)$

$$\Longrightarrow y = mx + c$$ L پر تمام نقطے (x, y) کے لئے ...... (3)

چنانچہ $y = mx + c$ میلان-مقطوعہ کی شکل میں خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

(d) مقطوعات کی شکل (Intercepts form)

فرض کرو خط L ، x محور اور y محور پر غیر صفر مقطوعات بالترتیب a اور b بناتے ہیں۔

$\therefore$ خطِ مستقیم x محور کو $A\,(a, 0)$ پر قطع کرتی ہے اور y محور کو $B\,(0, b)$ پر قطع کرتی ہے۔

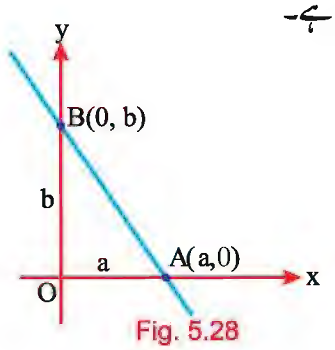


Fig. 5.28

AB کا میلان ; $m = -\dfrac{b}{a}$

اب (1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$\Longrightarrow \quad ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

ab سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$\therefore$ x مقطوعہ 'a' اور y مقطوعہ b رکھنے والی خط کی مساوات

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ہے ۔ L پر تمام نقطے (x, y) کے لئے .... (4)

غور کریں

(i) اگر میلان m رکھنے والی ایک خط x مقطوعہ d بناتی ہے تو اس خط کی مساوات $y = m\,(x - d)$ ہے۔

(ii) خطِ مستقیم $y = mx$ مبتدمبداء (origin) سے گزرتی ہے۔(x اور y محور دونوں $m \neq 0$ کے لئے صفر ہیں)

(iii) مساوات (3) کو استعمال کرتے ہوئے ہر ایک مساوات (1) ، (2) اور (4) کو میلان-مقطوعہ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

(iv) ہر ایک مساوات (1) ، (2) ، (3) اور (4) کو $px + qy + r = 0$ کی شکل میں L کے تمام نقاط $(x\,,\,y)$ کے لئے دوبارہ لکھا جاسکتا ہے۔ جس کو خطِ مستقیم کی عام شکل کہا جاتا ہے۔

مثال 5.19

خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو مجّد محورات (co-ordinate axes) کے متوازی ہوں اور $(3, -4)$ سے گزرتے ہوں۔

حل : فرض کرو L اور L' دو خطِ مستقیم ہیں جو $(3, -4)$ سے گزرتے ہیں اور بالترتیب x محور اور y محور کے متوازی ہیں۔

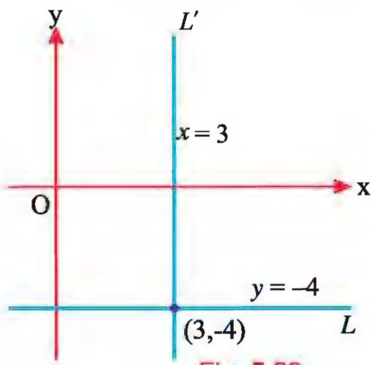


Fig. 5.29

خط L کے ہر ایک نقطہ کا y محدد -4 ہے۔

لہٰذا خط L کی مساوات $y = -4$ ہے۔

اسی طرح L' کے ہر ایک نقطہ کا x محدد 3 ہے۔

لہٰذا خط L' کی مساوات $x = 3$ ہے۔

مثال 5.20

خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جس کا زاویہ میلان $45°$ ہے اور y مقطوعہ $\frac{2}{5}$ ہے

حل :

خط کا میلان $m = \tan\theta$

$= \tan 45° = 1$

y مقطوعہ $c = \frac{2}{5}$

میلان - مقطوعہ کی شکل کی میں خطِ مستقیم کی مساوات

$$y = mx + c$$

$$y = x + \frac{2}{5} \implies y = \frac{5x+2}{5}$$

خطِ مستقیم کی مساوات $\therefore\ 5x - 5y + 2 = 0$

مثال 5.21

خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(-2, 3)$ سے گزرتی ہے جس کا میلان $\frac{1}{3}$ ہے۔

حل :

دیا گیا ہے : میلان $m = \frac{1}{3}$ اور ایک نقطہ $(x_1, y_1) = (-2, 3)$

میلان - نقطہ کی شکل میں، خطِ مستقیم کی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\implies y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

خطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات $x - 3y + 11 = 0$

مثال 5.22

نقاط $(-1, 1)$ اور $(2, -4)$ سے گزرنے والی خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو

حل : فرض کرو دیے گئے نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ ہیں۔

یہاں پر $x_1 = -1, y_1 = 1$ اور $x_2 = 2, y_2 = -4$ ہے۔

دو نقاط کی شکل میں، خطِ مستقیم کی مساوات

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\implies \frac{y - 1}{-4 - 1} = \frac{x + 1}{2 + 1}$$

$$\implies 3y - 3 = -5x - 5$$

خطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات $5x + 3y + 2 = 0$

مثال 5.23

ایک ΔABC کے راس $A(2, 1)$ ، $B(-2, 3)$ اور $C(4, 5)$ ہیں۔ راس A سے گزرنے والے خطِ وسطی کی مساوات معلوم کرو۔

حل : کسی راس اور اس کے مقابل کے اضلاع کے وسطی نقطہ کو ملانے والی خط کو خطِ وسطی کہتے ہیں۔

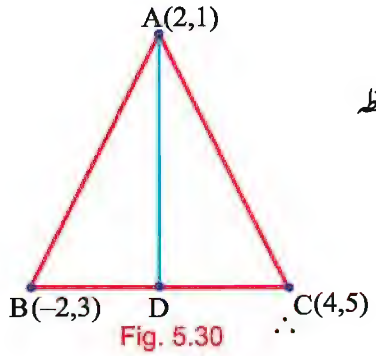


Fig. 5.30

فرض کرو BC کا وسطی نقطہ D ہے

BC کا وسطی نقطہ D, $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D(1, 4)$

اب خطِ وسطی AD کی مساوات

$\because$ $(x_1,y_1) = (2,1)$ اور $(x_2,y_2) = (1,4)$

$$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-2}{1-2}$$

$$\frac{y-1}{3} = \frac{x-2}{-1}$$

لہٰذا مطلوبہ مساوات ہے۔ $3x + y - 7 = 0$

مثال 5.24

اگر کسی خطِ مستقیم کا x مقطوعہ اور y مقطوعہ بالترتیب $\frac{2}{3}$ اور $\frac{3}{4}$ ہوں تو خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

حل : دیا گیا ہے : $a = \frac{2}{3}$ خطِ مستقیم کا x مقطوعہ

$b = \frac{3}{4}$ خطِ مستقیم کا y مقطوعہ

مقطوعات کی شکل میں خط کی مساوات کا ضابطہ استعمال کرنے پر

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

$$\implies \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

لہٰذا مطلوبہ مساوات ہے $9x + 8y - 6 = 0$

مثال 5.25

خط کی مساوات معلوم کرو جو $(6, -2)$ سے گزرتی ہے اور اس کے مقطوعات کا مجموعہ 5 ہے۔

حل : فرض کرو خطِ مستقیم کا x مقطوعہ اور y مقطوعہ بالترتیب a اور b ہیں۔

دیا گیا ہے

مقطوعات کا حاصل جمع $a + b = 5$

$$\implies \quad b = 5 - a$$

مقطوعات کی شکل میں خط مستقیم کی مساوات

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\implies \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

لہٰذا $(5= a)x + ay = a(5-a)$ (1)

چونکہ خط مستقیم جو (1) سے حاصل ہوئی ہے، یہ $(6, -2)$ سے گزرتی ہے، اس سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے

$$(5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 - 13a + 30 = 0.$$

یعنی $(a-3)(a-10) = 0$

$\therefore \quad a = 3$ یا $a = 10$

اگر $a = 3$ ہوتو $(5-3)x + 3y = 3(5-3) \Longleftarrow (1)$

$$\Longrightarrow \quad 2x + 3y = 6 \qquad (2)$$

اگر $a = 10$ ہوتو $(5-10)x + 10y = 10(5-10) \Longleftarrow (1)$

$$\Longrightarrow \quad -5x + 10y = -50$$

یعنی $x - 2y - 10 = 0. \qquad (3)$

لہٰذا $2x + 3y = 6$ اور $x - 2y - 10 = 0$ مطلوبہ خطوطِ مستقیم کی مساوات ہیں۔

مشق 5.4

1. خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو x محور کے متوازی ہیں اور x محور سے 5 اکائی کے فاصلہ پر ہیں۔
2. خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو محدد محورات کے متوازی ہیں اور جو $(-5, -2)$ سے گزرتی ہیں۔
3. خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جس کے
   (i) میلان -3 اور y مقطوعہ 4 ہے۔
   (ii) زاویۂ میلان $60°$ اور y مقطوعہ 3 ہے۔
4. خط کی مساوات معلوم کرو جو y محور کو مبدا کے اوپر 3 اکائی کے فاصلہ پر قطع کرتی ہے اور $\tan\theta = \frac{1}{2}$ جہاں θ زاویۂ میلان ہے۔
5. خط کا میلان اور y مقطوعہ معلوم کرو جس کی مساوات
   (i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$
6. ذیل کے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جن کا
   (i) میلان -4 اور $(1, 2)$ سے گزرتی ہے (ii) میلان $2/3$ اور $(5, -4)$ سے گزرتی ہے
7. خط کی مساوات معلوم کرو جو $(4, 2)$ اور $(3, 1)$ کو ملانے والی قطاعِ خط کے وسطی نقطے سے گزرتی ہے اور جس کا زاویۂ میلان $30°$ ہے
8. خط کی مساوات معلوم کرو جو ذیل کے نقطوں سے گزرتی ہے
   (i) $(-2, 5)$ اور $(3, 6)$ (ii) $(0, -6)$ اور $(-8, 2)$
9. ΔPQR کے راس R سے گزرنے والی خطِ وسطی کی مساوات معلوم کرو جن کے راس $P(1, -3)$ ، $Q(-2, 5)$ اور $R(-3, 4)$ ہیں

10۔ خطِ مستقیم کی مساوات کے نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ دئے گئے نقاط ہم خط ہیں

(i) $(4, 2)$ ، $(7, 5)$ اور $(9, 7)$ (ii) $(1, 4)$ ، $(3, -2)$ اور $(-3, 16)$

11. خط کی مساوات معلوم کرو جن کے محوروں پر x اور y مقطوعات اس طرح دئے گئے ہیں۔

(i) 2 اور 3 (ii) $-\frac{1}{3}$ اور $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ اور $-\frac{3}{4}$

12. خطِ مستقیم کے x اور y مقطوعات معلوم کرو۔

(i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$

13. خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(3, 4)$ سے گزرتی ہے اور مقطوعات کی نسبت $2 : 3$ ہے۔

14. خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(2, 2)$ سے گزرتی ہے اور مقطوعات کا حاصل جمع 9 ہے۔

15. $(5, -3)$ سے گزرنے والی خط کی مساوات معلوم کرو، جن کے محوروں پر مقطوعات مقدار میں یکساں ہیں اور علامت (sign) میں مختلف ہیں۔

16. خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(9, -1)$ سے گزرتی ہے اور جس کا x مقطوعہ ، y مقطوعہ کا تگنا ہے۔

17. ایک خطِ مستقیم محدد محورات کو A اور B پر قطع کرتا ہے۔ اگر AB کا وسطی نقطہ $(3, 2)$ ہو تو AB کی مساوات معلوم کرو۔

18. خط کی مساوات معلوم کرو جو $(22, -6)$ سے گزرتی ہے جس کا x مقطوعہ ، y مقطوعہ سے 5 اکائیاں زیادہ ہے۔

19. اگر $A(3, 6)$ اور $C(-1, 2)$ معین ABCD (Rhombus) کے دو راس ہیں تو خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو وتر BD پر ہو۔

20. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جس کا ڈھلان 3/2 اور P سے گزرتی ہے جہاں $A(-2, 6)$ اور $B(3, -4)$ کو ملانے والے قطاعِ خط کو P، $2 : 3$ کی نسبت میں اندرونی جانب تقسیم کرتا ہے۔

5.7 خطِ مستقیم کی عام مساوات

ہم پہلے ہی بتلا چکے ہیں کہ خطِ مستقیم کے مختلف شکلوں کی مساوات کو معیاری شکل $ax + by + c = 0$ میں تبدیل کر سکتے ہیں جہاں a ، b اور c حقیقی مستقل رقمیں ہیں اس طرح کہ یا تو $p \neq 0$ یا $q \neq 0$ ہے۔

آیئے اب ہم معلوم کریں

(i) $ax + by + c = 0$ کا میلان

(ii) $ax + by + c = 0$ خط کے متوازی خط کی مساوات

(iii) $ax + by + c = 0$ خط کے عمودی خط کی مساوات

(iv) ایک دوسرے کو قطع کرنے والی دو خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع

(i) خطِ مستقیم کی عام مساوات $ax + by + c = 0$ ہے۔

اس کو دوبارہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},\ b \neq 0 \qquad (1)$$

میلان- مقطوعہ کی شکل $y = mx + c$ اور (1) کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

میلان $m = -\frac{a}{b}$ اور y مقطوعہ $-\frac{c}{b}$ ہے۔

$\therefore$ مساوات $ax + by + c = 0$ کے لئے، ہمارے پاس ہے

$$\text{میلان } m = -\frac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} \qquad \text{اور} \qquad y \text{ مقطوعہ} = -\frac{\text{مستقل رقم}}{y \text{ کا ضریب}}$$

(ii) خط $ax + by + c = 0$ کے متوازی خط کی مساوات

ہم جانتے ہیں کہ دو خطوطِ مستقیم متوازی ہوتے ہیں اگر صرف اور صرف ان کے میلان مساوی ہوں۔

لہٰذا خط $ax + by + c = 0$ کے تمام متوازی خطوط کی مساوات کی شکل k کی مختلف قیمتوں کے لئے $ax + by + k = 0$ ہے۔

(iii) خط $ax + by + c = 0$ کے عمودی خط کی مساوات

ہم جانتے ہیں کہ دو غیر عمودی خطوط ایک دوسرے کے عمودی ہیں اگر صرف اور صرف ان کے میلان کا حاصلِ ضرب -1 ہو۔

لہٰذا $ax + by + c = 0$ کے تمام عمودی خطوط کی مساوات کی شکل k کی مختلف قیمتوں کے لئے $bx - ay + k = 0$ ہے۔

غور کریں

دو خطوطِ مستقیم $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ جہاں ضریب صفر نہیں ہیں

(i) متوازی ہوتے ہیں صرف اور صرف $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(ii) عمودی ہوتے ہیں صرف اور صرف $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

(iv) دو خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع

اگر دو خطوطِ مستقیم متوازی نہ ہوں تو وہ ایک نقطہ پر قطع کریں گے۔ یہ نقطہ دونوں خطوط پر ہوگا۔ لہٰذا دو مساوات کو حل کرنے پر نقطۂ تقاطع حاصل ہوگا۔

مثال 5.26

بتلاؤ کہ خطوطِ مستقیم $3x + 2y - 12 = 0$ اور $6x + 4y + 8 = 0$ متوازی ہیں۔

حل :

خطِ مستقیم $3x + 2y - 12 = 0$ کا میلان $m_1 = -\frac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = -\frac{3}{2}$

خطِ مستقیم $6x + 4y + 8 = 0$ کا میلان $m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\therefore m_1 = m_2$ لہٰذا دونوں خطوطِ مستقیم متوازی ہیں۔

مثال 5.27

ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم $x + 2y + 1 = 0$ اور $2x - y + 5 = 0$ ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

حل : خطِ مستقیم $x + 2y + 1 = 0$ کا میلان ، $m_1 = -\dfrac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = -\dfrac{1}{2}$

خطِ مستقیم $2x - y + 5 = 0$ کا میلان ، $m_2 = -\dfrac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

میلانوں کا حاصلِ ضرب $m_1 m_2 = -\dfrac{1}{2} \times 2 = -1$

لہٰذا دونوں خطوطِ مستقیم عمودی ہیں۔

مثال 5.28

خط کی مساوات معلوم کرو جو خط $x - 8y + 13 = 0$ کے متوازی ہے اور نقطہ $(2, 5)$ سے گزرتی ہے۔

حل : $x - 8y + 13 = 0$ خط کے متوازی خط کی مساوات $x - 8y + k = 0$

چونکہ یہ نقطہ $(2, 5)$ سے گزرتی ہے

$$2 - 8(5) + k = 0 \implies k = 38$$

$\therefore$ مطلوبہ خط کی مساوات $x - 8y + 38 = 0$ ہے۔

مثال 5.29

ΔABC کے راس $A(2, 1)$ ، $B(6, -1)$ اور $C(4, 11)$ ہیں۔ راس A سے گزرنے والی ارتفاع کے خط کی مساوات معلوم کرو۔

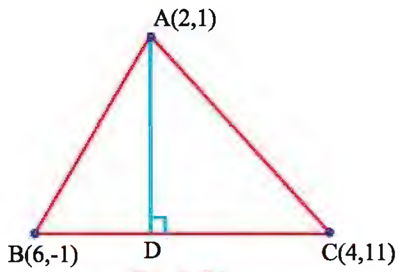


Fig. 5.31

حل : BC کا میلان $= \dfrac{11+1}{4-6} = -6$

چونکہ خط AD ، BC پر عمود ہے۔

AD کا میلان $= \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AD کی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2) \implies 6y - 6 = x - 2$$

$\therefore$ مطلوبہ خطِ مستقیم کی مساوات $x - 6y + 4 = 0$

مشق 5.5

1. خطِ مستقیم کا میلان معلوم کرو۔

(i) $3x + 4y - 6 = 0$ (ii) $y = 7x + 6$ (iii) $4x = 5y + 3$

2. معلوم کرو کہ خطوطِ مستقیم $x + 2y + 1 = 0$ اور $3x + 6y + 2 = 0$ متوازی ہیں۔

3. معلوم کرو کہ خطوطِ مستقیم $3x - 5y + 7 = 0$ اور $15x + 9y + 4 = 0$ عمودی ہیں۔

4. اگر خطوطِ مستقیم $y/2 = x - p$ اور $ax + 5 = 3y$ متوازی ہوں تو a کی قیمت معلوم کرو۔

5۔ a کی قیمت معلوم کرو جب کہ خطوطِ مستقیم $5x - 2y - 9 = 0$ اور $ay + 2x - 11 = 0$ ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

6. اگر خطوطِ مستقیم $8px + (2 - 3p)y + 1 = 0$ اور $px + 8y - 7 = 0$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں تو p کی قیمت معلوم کرو۔

7. $(h, 3)$ اور $(4, 1)$ نقاط سے گزرنے والی خطِ مستقیم $7x - 9y - 19 = 0$ کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتی ہے تو $'h'$ کی قیمت معلوم کرو

8. $3x - y + 7 = 0$ خط کے متوازی خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(1, -2)$ سے گزرتی ہے۔

9. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خط $x - 2y + 3 = 0$ کے عمود میں ہو اور نقطہ $(1, -2)$ سے گزرتی ہو۔

10. $(3, 4)$ اور $(-1, 2)$ نقطوں کو ملانے والی خطِ مستقیم کے عمودی ناصف کی مساوات معلوم کرو۔

11. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط $2x + y - 3 = 0$ اور $5x + y - 6 = 0$ کے نقطۂ تقاطع سے گزرتی ہے اور نقاط $(1, 2)$ اور $(2, 1)$ سے گزرنے والی خط کے متوازی ہے۔

12. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوطِ مستقیم $5x - 6y = 1$ اور $3x + 2y + 5 = 0$ کے نقطۂ تقاطع سے گزرتی ہے اور خط $3x - 5y + 11 = 0$ کے عمودی ہے۔

13. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط $3x - y + 9 = 0$ اور $x + 2y = 4$ کے نقطۂ تقاطع اور خطوط $2x + y - 4 = 0$ اور $x - 2y + 3 = 0$ کے نقطۂ تقاطع کو ملاتی ہے۔

14. ΔABC کے راس $A(2, -4)$ ، $B(3, 3)$ اور $C(-1, 5)$ ہیں۔ راس B سے گزرنے والی ارتفاع کے ساتھ کے خط کی مساوات معلوم کرو۔

15. ΔABC کے راس $A(-4, 4)$ ، $B(8, 4)$ اور $C(8, 10)$ ہیں۔ راس A سے گزرنے والی خطِ وسطی کے ساتھ کے خط کی مساوات معلوم کرو۔

16. خطِ مستقیم $3x + 2y = 13$ پر مبداء سے عمود کے قدم (نچلے حصے) کے محدّد (co-ordinates) معلوم کرو۔

17. اگر $x + 2y = 7$ اور $2x + y = 8$ کسی دائرہ کے دو قطروں کے مساوات ہوں تو دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو، اگر نقطہ $(0, -2)$ دائرہ پر ہے۔

18. قطاعِ خط کی لمبائی معلوم کرو جس کے حد نقطے (end points) خطوط $2x - 3y + 4 = 0$ اور $x - 2y + 3 = 0$ کا نقطۂ تقاطع اور نقاط $(3, -2)$ اور $(-5, 8)$ کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہو۔

19. ΔPQR مساوی الساقین میں $PQ = PR$ ہے۔ قاعدہ QR ، x محور پر ہے۔ P ، y محور پر ہے اور PQ کی مساوات $2x - 3y + 9 = 0$ ہے۔ PR پر خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

مشق 5.6

صحیح جوابات کا انتخاب کرو۔

.1 $(a, -b)$ اور $(3a, 5b)$ نقاط کو ملانے والی خط کا وسطی نقطہ

(A) $(-a, 2b)$ (B) $(2a, 4b)$ (C) $(2a, 2b)$ (D) $-a, -3b$

.2 $A(1, -3)$ اور $B(-3, 9)$ نقاط کو ملانے والی قطاعِ خط کو اندرونی جانب $1:3$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ P

(A) $(2, 1)$ (B) $(0, 0)$ (C) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ (D) $(1, -2)$

.3 اگر نقاط $A(3, 4)$ اور $B(14, -3)$ کو ملانے والی قطاعِ خط x محور کو P پر ملتا ہے تو P ، AB کو اس نسبت میں تقسیم کرتا ہے

(A) $4:3$ (b) $3:4$ (c) $2:3$ (d) $4:1$

.4 راسیں $(-2, -5)$ ، $(-2, 12)$ اور $(10, -1)$ رکھنے والے مثلث کا ہندسی مرکز

(A) $(6, 6)$ (B) $(4, 4)$ (C) $(3, 3)$ (D) $2, 2$

.5 اگر $(1, 2)$ ، $(4, 6)$ ، $(x, 6)$ اور $(3, 2)$ ایک متوازی الاضلاع کی راسیں ہیں جو ترتیب سے لی گئی ہیں تو x کی قیمت

(A) 6 (b) 2 (c) 1 (d) 3

.6 مبداء ، $(2, 0)$ اور $(0, 2)$ نقاط سے بننے والی مثلث کا رقبہ

(A) 1 مربع اکائی (B) 2 مربع اکائیاں (C) 4 مربع اکائیاں (D) 8 مربع اکائیاں

.7 $(1, 1)$ ، $(0, 1)$ ، $(0, 0)$ اور $(1, 0)$ نقطوں سے بننے والی چار ضلعی کا رقبہ

(A) 3 مربع اکائیاں (B) 2 مربع اکائیاں (C) 4 مربع اکائیاں (D) 1 مربع اکائی

.8 x محور کے متوازی خط کا زاویہ میلان

(A) $0°$ (B) $60°$ (C) $45°$ (D) $90°$

9 $(3, -2)$ اور $(-1, a)$ نقطوں کو ملانے والی خط کا میلان $-\frac{3}{2}$ ہو تو a کی قیمت

(A) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

.10 $(-2, 6)$ اور $(4, 8)$ کو ملانے والی خط کے عمودی خط کا میلان

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

.11 خطوطِ مستقیم $9x - y - 2 = 0$ اور $2x + y - 9 = 0$ کا نقطۂ تقاطع

(A) $(-1, 7)$ (B) $(7, 1)$ (C) $(1, 7)$ (D) $(-1, -7)$

.12 خطِ مستقیم $4x + 3y - 12 = 0$ ، y محور کو اس نقطہ پر قطع کرتا ہے

(A) $(3, 0)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(0, -4)$

.13 $7y - 2x = 11$ خطِ مستقیم کا میلان مساوی ہے

(A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

.14 x محور کے متوازی اور نقطہ $(2, -7)$ سے گذرنے والے خط کی مساوات

(A) $x = 2$ (B) $x = -7$ (C) $y = -7$ (D) $y = 2$

15. خطِ مستقیم $2x - 3y + 6 = 0$ کے x اور y مقطوعات بالترتیب

(A) 2, 3 (b) 3, 2 (c) −3, 2 (d) 3, −2

16. ایک دائرہ کا مرکز $(-6, 4)$ ہے۔ اگر دائرہ کے قطر کا ایک حد $(-12, 8)$ ہو تو اس کا دوسرا حد

(A) $(-18, 12)$ (b) $(-9, 6)$ (c) $(-3, 2)$ (d) $(0, 0)$

17. مبداء سے گزرنے والی اور خط $2x + 3y - 7 = 0$ کے عمودی خط کی مساوات

(A) $2x + 3y = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

18. y محور کے متوازی اور نقطہ $(-2, 5)$ سے گزرنے والی خطِ مستقیم کی مساوات

(A) $x - 2 = 0$ (B) $x + 2 = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

19. اگر نقاط $(2, 5)$ ، $(4, 6)$ اور (a, a) ہم خط ہوں تو a کی قیمت

(A) −8 (B) 4 (C) −4 (D) 8

20. ایک خطِ مستقیم $y = 2x + k$ ، نقطہ $(1, 2)$ سے گزرتی ہے تو k کی قیمت

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) −3

21۔ میلان 3 اور y-مقطوعہ 4− والے خطِ مستقیم کی مساوات

(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$

(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22۔ خطوطِ مستقیم $y = 0$ اور $x = -4$ کا نقطہ تقاطع

(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) 4, 0

23۔ اگر خطوطِ مستقیم $3x + 6y + 7 = 0$ اور $2x + ky = 5$ ایک دوسرے کے عمود میں ہوں تو k کی قیمت

(A) 1 (b) −1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

یاد رکھنے کے نکات

- نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کا درمیانی فاصلہ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ہے۔
- نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطاع خط کو اندرونی جانب $l : m$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ P
  $\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$. ہے۔
- نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطاع خط کو بیرونی جانب $l : m$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ P
  $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$. ہے۔
- (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) نقطوں کو ملانے والی قطاع خط کا وسطی نقطہ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ہے۔

- (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) نقطوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ

$$\frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$$

- تین نقاط $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ہم خط ہیں اگر صرف اور صرف

(i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ یا

(ii) AC کا میلان یا BC کا میلان = AB کا میلان

- اگر ایک خط x محور کے مثبت جانب زاویہ θ بناتی ہے تو میلان ; $m = \tan\theta$

- (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے گزرنے والی غیر عمودی خط کا میلان

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

- خط $ax + by + c = 0$ کا میلان $m = -\frac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = -\frac{a}{b}$، جس میں $b \neq 0$ ہو۔

- افقی خط کا میلان صفر ہوگا اور عمودی خط کا میلان غیر واضح ہے۔

- دو خطوط صرف اور صرف متوازی اس وقت ہوں گے اگر ان کے میلان مساوی ہوں۔

- دو غیر عمودی خطوط صرف اور صرف اس وقت عمودی ہوں گے اگر ان کے میلان کا حاصلِ ضرب -1 ہو، یعنی $m_1 m_2 = -1$

خطوطِ مستقیم کی مساوات

	خطِ مستقیم	مساوات
1.	x محور	$y = 0$
2.	y محور	$x = 0$
3.	x محور کے متوازی	$y = k$
4.	y محور کے متوازی	$x = k$
5.	$ax + by + c = 0$ خط کے متوازی	$ax+by+k = 0$
6.	$ax + by + c = 0$ خط کے عمودی	$bx-ay+k = 0$
	دیا گیا ہے (معطیہ)	مساوات
1.	مبدا سے گزرتا ہے	$y = mx$
2.	میلان m اور y مقطوعہ c	$y = mx + c$
3.	میلان m اور ایک نقطہ (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x-x_1)$
4.	دونوں نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے گزرنے والا	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
5.	x مقطوعہ a ، y مقطوعہ b	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

6

علمِ ہندسہ

GEOMETRY

- تعارف
- بنیادی تناسب کا مسئلہ
- زاویہ کے ناصف کا مسئلہ
- متشابہ مثلثیں
- مماس وتر کا مسئلہ
- مسئلہ فیثا غورث

There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of spheres - Pythagoras

اقلیدس

(300 ق.م.)

یونان

اقلیدس کی تصنیف 'عناصر' علمِ ریاضی میں تاریخ کی سب سے زیادہ پُراثر تخلیق ہے جو علمِ ریاضی کے سکھانے میں خصوصاً علمِ ہندسہ کے سکھانے میں اہم درسی کتاب کا کردار ادا کرتی ہے۔

اقلیدس کے الگواردم (alogrithm) کا طریقہ مشترک مقسومِ علیہ اعظم محسوب کرنے میں بہت ہی کارآمد ہے۔

6.1 تعارف

علمِ ہندسہ، ریاضی کی ایک شاخ ہے جو مختلف ہندسی شکلوں کی خصوصیات کے موضوعہ (axiom) یا مسئلوں کے ذریعہ بغیر کسی ٹھیک پیائش کے سمجھاتی ہے، اسے نظریاتی (مسئلاتی) علمِ ہندسہ کہتے ہیں۔علمِ ہندسہ کے مطالعہ سے ہمارے منطقی طریقہ سے سوچنے کی قوت میں اضافہ ہوتا ہے۔

اقلیدس جو تقریباً 300 ق.م. میں موجود تھے، انہیں علم ہندسہ کا بانی مانا جاتا ہے۔اقلیدس ہندسی مطالعہ میں منطقی نتائج اخذ کرنے میں ایک نئے انداز میں سوچنے کے طریقہ کا آغاز کیا جو پہلے ہی ثابت کئے ہوئے نتائج یا مخصوص مفروضوں پر مبنی ہے۔

انجینئرنگ اور فنِ تعمیر کے میدانوں میں علمِ ہندسہ کی اہمیت بہت زیادہ ہے۔مثال کے طور پر روزمرہ کی زندگی میں کام آنے والے بہت سے پُل مشابہ مثلث اور مماثل کی بنیاد پر بنائے گئے ہیں۔اس قسم کے پل جس میں مثلثوں کے اصول استعمال ہوئے ہیں، بہت زیادہ پائیدار اور زیادہ بوجھ اور تناؤ برداشت کر سکتے ہیں۔عمارتوں کی تعمیر میں علمِ ہندسہ دو قسم کا کردار ادا کرتا ہے۔ایک یہ ہے کہ اسکی بناوٹ بہت پائیدار ہوتی ہے اور دوسری یہ کہ اسکی خوبصورتی میں اضافہ ہوتا ہے۔ہندسی شکلوں کا بخوبی استعمال عمارتوں کی ساخت جیسے تاج محل وغیرہ کو ایک عالمی پہچان کی نشان بنا دیتے ہیں جس کو ہر ایک نے سراہا ہے۔ریاضی کی مختلف شکلوں کو سمجھنے اور وسعت دینے میں ہندسی ثبوت بہت اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

بنیادی تناسب کے مسئلہ کو مشہور یونانی ریاضی دان تھیلس (Thales) سے منسوب کیا جاتا ہے۔اس مسئلہ کو تھیلس کا مسئلہ بھی کہتے ہیں۔

بنیادی تناسب کے مسئلہ کو سمجھنے کے لئے آیئے ہم ذیل کی کارروائی انجام دیں۔

کارروائی

کسی بھی پیمائش کا ایک زاویہ XAY کھینچو اور نقاط (کوئی پانچ نقاط) زاویہ کے بازو AX پر P_1 ، P_2 ، D ، P_3 اور B اس طرح نشان کرو کہ $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ اکائی (فرض کریں)

B سے گزارتے ہوئے ایک خط کھینچو جو بازو AY کو C پر قطع کرے۔ پھر D سے گزارتے ہوئے ایک خط BC کے متوازی کھینچو جو AC کو E پر قطع کرے۔

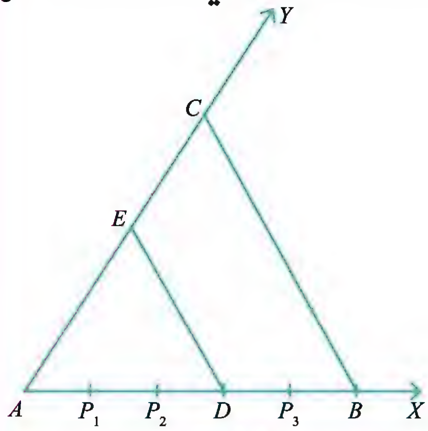


Fig.6.1

$AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ اکائیاں اور

$DB = DP_3 + P_3B = 2$ اکائیاں

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$$

AE اور EC کی پیمائش کرو۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$

لہٰذا ΔABC میں اگر $DE \parallel BC$ ہو تو $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ہم اس نتیجہ کو مسئلہ کی صورت میں ثابت کرتے ہیں جو بنیادی تناسب کا مسئلہ یا تھیلس کا مسئلہ کہلاتا ہے۔ جیسا کہ ذیل میں درج ہے۔

6.2 بنیادی تناسب اور زاویائی ناصف کے مسئلے

مسئلہ 6.1 بنیادی تناسب کا مسئلہ یا تھیلس کا مسئلہ

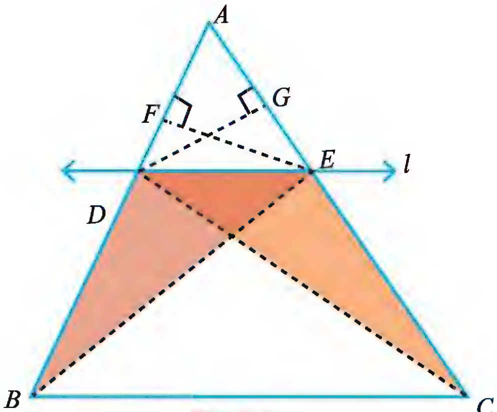


Fig. 6.2

اگر ایک خطِ مستقیم ایک مثلث کے ایک ضلع کے متوازی کھینچی جائے جو دوسرے دو اضلاع کو قطع کرے تو وہ دو اضلاع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتی ہے۔

دیا گیا ہے : مثلث ABC میں،

BC کے متوازی خطِ مستقیم l ،

AB کو D پر اور AC کو E پر قطع کرتی ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

تصنیف : BE اور CD کو ملاؤ۔ $EF \perp AB$ اور $DG \perp CA$ کھینچو۔

ثبوت

چونکہ $EF \perp AB$ ، مثلث ADE اور DBE کا ارتفاع EF ہے۔

اور (ΔADE) رقبہ $= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع $= \frac{1}{2} AD \times EF$

(ΔDBE) رقبہ $= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع $= \frac{1}{2} DB \times EF$

$$\therefore \qquad \frac{\text{رقبہ } (\Delta ADE)}{\text{رقبہ } (\Delta DBE)} = \frac{\frac{1}{2}AD \times EF}{\frac{1}{2}DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

اسی طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{رقبہ } (\Delta ADE)}{\text{رقبہ } (\Delta DCE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

مگر ΔDBE اور ΔDCE ایک ہی قاعدہ BE پر ہیں اور ایک ہی متوازی خطوط BC اور DE کے درمیان ہیں

$$\therefore \qquad \text{رقبہ } (\Delta DBE) = \text{رقبہ } (\Delta DCE) \qquad (3)$$

(1)، (2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ لہٰذا مسئلہ ثابت ہوا۔

منطقی نتیجہ (Corollary)

اگر ΔABC میں خطِ مستقیم DE، BC کے متوازی ہو اور AB کو D پر اور AC کو E پر قطع کرے تو

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

ثبوت

(i) تھیلس کے مسئلہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

(ii) اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

کیا آپ جانتے ہیں؟

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

اس کو کامپونینڈو کا اصول (Componendo rule) کہتے ہیں۔

یہاں $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

$$\Rightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

کامپونینڈو کے اصول کے تحت

کیا اس مسئلہ کا برعکس درست ہے؟ اس کی تصدیق کے لئے ہم ذیل کی کارروائی کریں گے۔

کارروائی

شعاع AX پر کوئی زاویہ $\angle XAY$ کھینچو۔ اس پر نقاط P_1، P_2، P_3، P_4 اور B اس طرح نشان کرو کہ

(فرض کریں) $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B = 1$ اکائی

اسی طرح شعاع AY پر نقاط Q_1، Q_2، Q_3، Q_4 اور C نشان کرو اس طرح کہ

(فرض کریں) $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4C = 2$ اکائیاں

پھر P_1Q_1 اور BC کو ملاؤ۔

تو $\frac{AQ_1}{Q_1C} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ اور $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{4}$

لٰہذا $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AQ_1}{Q_1C}$

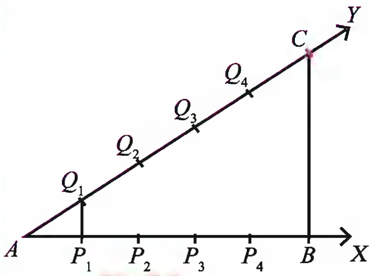


Fig. 6.3

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ P_1Q_1 اور BC ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

یعنی $P_1Q_1 \parallel BC$ (1)

اسی طرح P_2Q_2 ، P_3Q_3 اور P_4Q_4 کو ملانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AQ_2}{Q_2C} = \frac{2}{3} \quad \text{اور} \quad P_2Q_2 \parallel BC \qquad (2)$$

$$\frac{AP_3}{P_3B} = \frac{AQ_3}{Q_3C} = \frac{3}{2} \quad \text{اور} \quad P_3Q_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AP_4}{P_4B} = \frac{AQ_4}{Q_4C} = \frac{4}{1} \quad \text{اور} \quad P_4Q_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1) ، (2) ، (3) اور (4) سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ اگر ایک خطِ مستقیم ایک مثلث کے دو اضلاع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

اسی مناسبت سے ہم ایک مسئلہ کو بیان کریں جو تھیلس کے مسئلہ کا برعکس ہے۔

مسئلہ 6.2 بنیادی تناسب کے مسئلہ کا برعکس (تھیلس کے مسئلہ کا برعکس)

اگر ایک خطِ مستقیم کسی مثلث کے کوئی اضلاع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

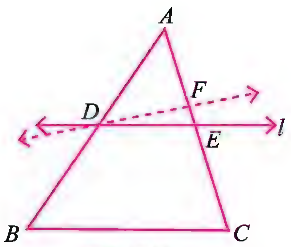


Fig 6.4

دیا گیا ہے : ایک خط l ، ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے ، اس طرح کہ

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad (1)$$

ثابت کرنا ہے: $DE \parallel BC$

تصنیف : اگر DE ، BC کے متوازی نہ ہو تو ایک خط $DF \parallel BC$ کھینچو۔

ثبوت

چونکہ $DF \parallel BC$ ہے ، تھیلس کے مسئلہ کے تحت ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC} \implies \frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$$

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC} \qquad \therefore\ FC = EC$$

یہ اسی وقت ممکن ہے جب F اور E منطبق (Coincide) ہوجائیں، لہٰذا $DE \parallel BC$

مسئلہ 6.3 زاویہ کے ناصف کا مسئلہ (Angle bisector theorem)

ایک مثلث کے اندرونی (بیرونی) زاویہ کا زاویائی ناصف مقابل کے ضلع کو اس زاویہ کے نظیری اضلاع کی نسبت میں (اندرونی) جانب تقسیم کرتا ہے۔

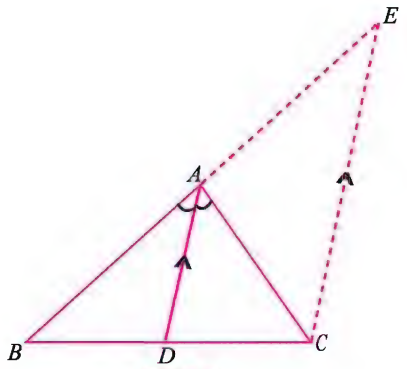


Fig.6.5

صورت (i) (اندرونی)

دیا گیا ہے : ΔABC میں $\angle BAC$ کا اندرونی ناصف AD ہے جو BC کو D پر ملتا ہے

ثابت کرنا ہے : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

تصنیف : $DA \parallel CE$ کو اس طرح کھینچو جو دراز کردہ خط BA پر E سے ملے۔

ثبوت

چونکہ $DA \parallel CE$ اور AC قاطع ہے۔ اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(1) $\angle DAC = \angle ACE$ (متبادلہ زاویے)

(2) $\angle BAD = \angle AEC$ (نظیری زاویے)

(3) چونکہ AD کا زاویائی ناصف $\angle A$ ہے، $\angle BAD = \angle DAC$

(1)، (2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\angle ACE = \angle AEC$

اس طرح ΔACE سے ہمیں $AE = AC$ حاصل ہوتا ہے۔ (مساوی زاویوں کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں)

اب ΔBCE سے ہمیں حاصل ہوتا ہے، $DA \parallel CE$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(تھیلس کا مسئلہ)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (AE = AC)$$

چنانچہ ثابت ہوا۔

صورت (ii) بیرونی (یہ حصہ امتحان کے لئے نہیں ہے)

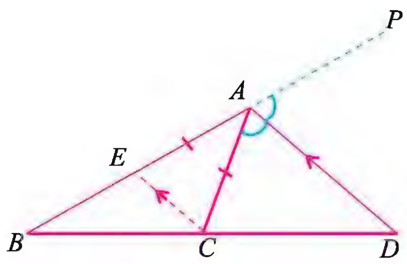


Fig.6.6

دیا گیا ہے : ΔABC میں

$\angle BAC$ کا بیرونی زاویائی ناصف AD ہے اور

دراز کردہ BC کو D پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

تصنیف : $DA \parallel CE$ کھینچو جو AB کو E پر قطع کرے۔

ثبوت

$DA \parallel CE$ ہے اور AC قاطع ہے۔

(1) $\angle ECA = \angle CAD$ (متبادلہ زاویے)

نیز $DA \parallel CE$ اور BP قاطع ہے

(2) $\angle CEA = \angle DAP$ (نظیری زاویے)

لیکن $\angle CAP$ کا ناصف AD ہے

(3) $\angle CAD = \angle DAP$

(1) ، (2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\angle CEA = \angle ECA$$

اس طرح ΔECA سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $AC = AE$ (مساوی زاویوں کے مقابلے کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں)

ΔBDA سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ، $AD \parallel EC$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(تھیلس کا مسئلہ)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \quad (AE = AC)$$

لہٰذا مسئلہ ثابت ہوا۔

مسئلہ 6.4 زاویہ کے ناصف کے مسئلہ کا برعکس

اگر کسی مثلث کے ایک راس سے گزرنے والا خطِ مستقیم ، مقابلے کے ضلع کو اندرونی (یا بیرونی) جانب سے دوسرے دو اضلاع کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خطِ مستقیم اندرونی (یا بیرونی) طور پر اس پر زاویہ کا ناصف راس پر ہوتا ہے۔

صورت (i) (اندرونی)

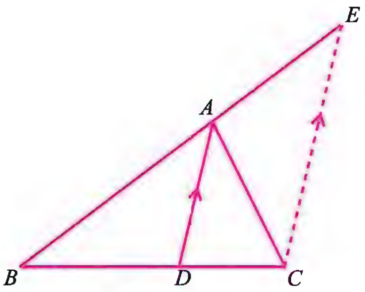


Fig. 6.7

دیا گیا ہے : ΔABC میں ، خط AD مقابل کے ضلع AD کو اندرونی جانب اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

ثابت کرنا ہے : $\angle BAC$ کا اندرونی ناصف AD ہے

یعنی ثابت کرنا ہے : $\angle BAD = \angle DAC$

تصنیف :

'C' سے گزارتے ہوئے $DA \parallel CE$ کھینچو جو دراز کردہ BA کو E پر ملے

ثبوت

چونکہ $AD \parallel CE$ ہے ، تھیلس کے مسئلہ کے تحت ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad (2)$$

لہٰذا (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$$\therefore \quad AE = AC$$

(3) اب ΔACE سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\angle ACE = \angle AEC$ (AE=AC)

چونکہ متوازی خطوط AD اور CE کا قاطع AC ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

(4)......(اندرونی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں) $\angle DAC = \angle ACE$

نیز متوازی خطوط AD اور CE کا قاطع BE ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

(5)......(نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں) $\angle BAD = \angle AEC$

(3)، (4) اور (5) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\angle BAD = \angle DAC$$

$\angle BAC$ کا زاویائی ناصف AD ہے۔ $\therefore$

لہٰذا مسئلہ ثابت ہوا۔

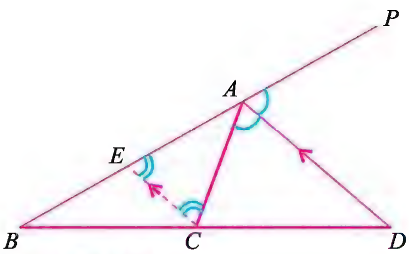


Fig. 6.8

صورت (ii) بیرونی (یہ حصہ امتحان کے لئے نہیں ہے)

دیا گیا ہے : ΔABC میں، خط AD دراز کردہ مقابل کے ضلع BC کو بیرونی طور D پر اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

ثابت کرنا ہے : $\angle PAC$ کا ناصف AD ہے

یعنی ثابت کرنا ہے $\angle PAD = \angle DAC$

تصنیف : C سے گزرتے ہوئے $DA \parallel CE$ کھینچو جو BA کو E پر ملے

ثبوت

چونکہ $DA \parallel CE$ ہے، تھیلس کے مسئلہ کے تحت

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{EA} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \qquad \therefore\ AE = AC$$

ΔACE سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(3) $\angle ACE = \angle AEC$ (AE=AC)

چونکہ متوازی خطوط AD اور CE کا قاطع AC ہے،

(4) (متبادلہ اندرونی زاویے) $\angle ACE = \angle DAC$

نیز متوازی خطوط AD اور CE کا قاطع BA ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(5) (نظیری زاویے) $\angle PAD = \angle AEC$

(3)، (4) اور (5) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\angle PAD = \angle DAC$$

$\angle PAC$ کا ناصف AD ہے۔ لہٰذا $\angle BAC$ کا بیرونی ناصف AD ہے۔

لہٰذا مسئلہ ثابت ہوا۔

مثال 6.1 ΔABC میں $DE \parallel BC$ اور $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ ہے۔اگر $AE = 3.7$ cm ہوتو EC معلوم کرو

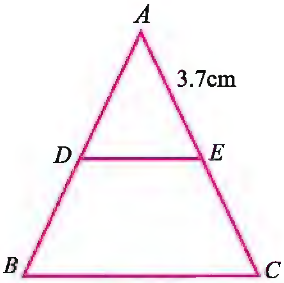


Fig.6.9

حل : ΔABC میں $DE \parallel BC$

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{(تھیلس کا مسئلہ)}$$

$$\Longrightarrow \quad EC = \frac{AE \times DB}{AD}$$

لہٰذا $EC = \frac{3.7 \times 3}{2} = 5.55$ cm

مثال 6.2 ΔPQR میں دیا گیا ہے کہ PQ پر ایک نقطہ S ہے، اس طرح کہ $ST \parallel QR$ اور $\frac{PS}{SQ} = \frac{3}{5}$ ہے۔ اگر $PR = 5.6$ cm ہوتو PT معلوم کرو۔

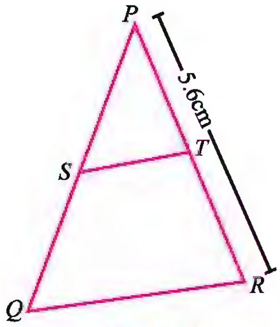


Fig. 6.10

حل : ΔPQR میں $ST \parallel QR$ اور تھیلس کے مسئلہ کے تحت

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \qquad (1)$$

فرض کرو $PT = x$ ہے۔ لہٰذا $TR = PR - PT = 5.6 - x$

(1) سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے $PT = TR\left(\frac{PS}{SQ}\right)$

$$x = (5.6 - x)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$5x = 168 - 3x$$

لہٰذا $x = \frac{168}{8} = 2.1$ یعنی $PT = 2.1$ cm

مثال 6.3 ΔABC میں، خطوط AB اور AC پر بالترتیب نقاط D اور E اس طرح ہیں کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ اور $\angle ADE = \angle DEA$ ثابت کرو کہ ΔABC مساوی الساقین ہے۔

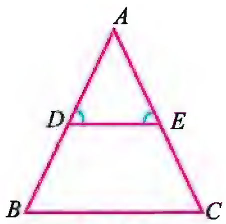


Fig. 6.11

حل :

چونکہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ہے ، تھیلس کے برعکس مسئلہ کے تحت ، $BC \parallel DE$ ہے

$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC \qquad (1)$

اور $\quad \angle DEA = \angle BCA \qquad (2)$

لیکن دیا گیا ہے $\quad \angle ADE = \angle DEA \qquad (3)$

(1) ، (2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\angle ABC = \angle BCA$

$\therefore AC = AB$ (اگر مقابلے کے زاویے مساوی ہوں تو مقابل کے اضلاع بھی مساوی ہوتے ہیں)

لہٰذا ΔABC مساوی الساقین ہے۔

مثال 6.4

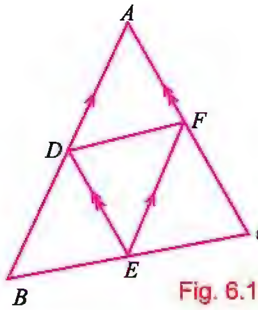


Fig. 6.12

ΔABC میں اضلاع AB ، BC اور CA پر بالترتیب نقاط D ، E اور F
اس طرح لئے گئے ہیں کہ $AC \parallel DE$ اور $AB \parallel EF$ ہے۔

ثابت کرو کہ $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{FC}$

حل :

دیا گیا ہے کہ ΔABC میں $AC \parallel DE$ ہے

(1) (تھیلس کا مسئلہ) $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BE}{EC}$ $\therefore$

نیز دیا گیا ہے کہ $AB \parallel EF$

(2) (تھیلس کا مسئلہ) $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AF}{FC}$ $\therefore$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AF}{FC}$

(کمپونڈو اصول) $\dfrac{BD+AD}{AD} = \dfrac{AF+FC}{FC}$ $\Longrightarrow$

لہٰذا $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{FC}.$

مثال 6.5 ΔABC میں $\angle A$ کا اندرونی ناصف AD ، ضلع BC کو D پر ملتا ہے۔
اگر $BD = 2.5\text{ cm}$ ، $AB = 5\text{ cm}$ اور $AC = 4.2\text{ cm}$ ہو تو DC معلوم کرو

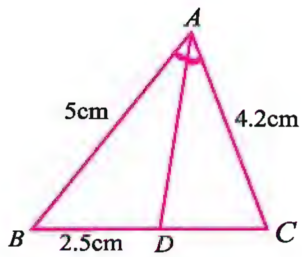


Fig. 6.13

حل : ΔABC میں $\angle A$ کا اندرونی ناصف AD ہے

(زاویہ کے ناصف کا مسئلہ) $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ $\therefore$

$\Longrightarrow \quad DC = \dfrac{BD \times AC}{AB}$

لہٰذا $DC = \dfrac{2.5 \times 4.2}{5} = 2.1\text{ cm}.$

مثال 6.6 ΔABC میں ، $\angle A$ کا بیرونی ناصف AE ہے جو دراز کردہ BC کو E پر ملتا ہے۔
اگر $AB = 10\text{ cm}$ ، $AC = 6\text{ cm}$ اور $BC = 12\text{ cm}$ ہو تو CE دریافت کرو۔

حل : ΔABC میں $\angle A$ کا بیرونی ناصف AE ہے۔ جو دراز کردہ BC کو E پر ملتا ہے
فرض کرو $CE = x\text{ cm}$ ہے۔ زاویہ کے ناصف کے مسئلہ کے تحت ہمیں حاصل ہوتا ہے

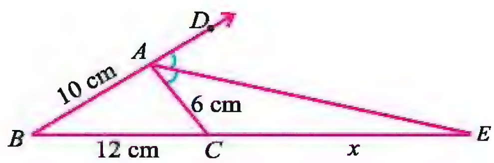


Fig.6.14

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \quad \Longrightarrow \quad \frac{12+x}{x} = \frac{10}{6}$$

$3(12+x) = 5x.$ Thus, $x = 18.$

لہٰذا $CE = 18\text{ cm}.$

مثال 6.7 ΔABC کے ضلع BC کا وسطی نقطہ D ہے۔اگر AB اور AC پر نقاط P اور Q اس طرح ہوں کہ $\angle BDA$ کا ناصف DP اور $\angle ADC$ کا ناصف DQ ہے۔ثابت کرو کہ $PQ \parallel BC$

حل : ΔABD میں $\angle BDA$ کا ناصف DP ہے

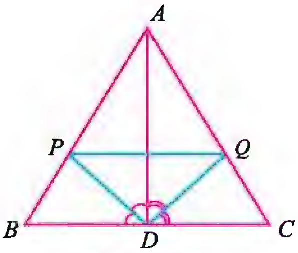


Fig. 6.15

$$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BD} \quad \text{(زاویائی ناصف کا مسئلہ)} \quad (1)$$

ΔADC میں $\angle ADC$ کا ناصف DQ ہے

$$\therefore \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{DC} \quad \text{(زاویائی ناصف کا مسئلہ)} \quad (2)$$

لیکن $BD = DC$ (BC کا وسطی نقطہ D ہے)

اب $(2) \Longrightarrow \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AD}{BD}$ (3)

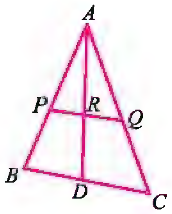
(1) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

لہٰذا $PQ \parallel BC$ (تھیلس کے مسئلہ کا برعکس)

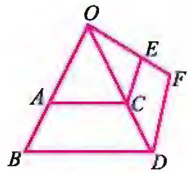
مشق 6.1

1. ΔABC میں D اور E بالترتیب اضلاع AB اور AC پر نقاط اس طرح ہیں کہ $DE \parallel BC$ ۔
   (i) اگر $AD = 6$ cm ، $BD = 9$ cm اور $AE = 8$ cm ہو تو AC معلوم کرو
   (ii) اگر $AD = 8$ cm ، $AB = 12$ cm اور $AE = 12$ cm ہو تو CE معلوم کرو
   (iii) اگر $AD = 4x-3$ cm ، $BD = 3x - 1$ cm اور $AE = 8x - 7$ cm اور $EC = 5x - 3$ ہو تو x کی قیمت معلوم کرو



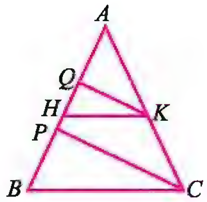
2. خاکہ میں $AP = 3$ cm ، $AR = 4.5$ cm ، $AQ = 6$ cm ، $AB = 5$ cm اور $AC = 10$ cm ہے۔ AD کا طول معلوم کرو۔

3. ΔAQR میں اضلاع PQ اور PR پر بالترتیب نقاط E اور F ہیں۔
   ذیل کی صورتوں میں تصدیق کرو کہ کیا $EF \parallel QR$ ہے؟
   (i) $PE = 3.9$ cm ، $EQ = 3$ cm ، $PF = 3.6$ cm اور $FR = 2.4$ cm
   (ii) $PE = 4$ cm ، $QE = 4.5$ cm ، $PF = 8$ cm اور $RF = 9$ cm

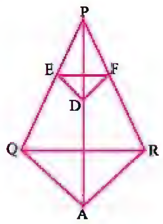


4. خاکہ میں $AC \parallel BD$ اور $DF \parallel CE$ ہے۔
   اگر $OA = 12$ cm ، $AB = 9$ cm ، $OC = 8$ cm
   اور $EF = 4.5$ cm ہو تو FO معلوم کرو۔

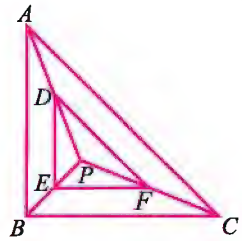
5. ABCD ایک چارضلعی ہے جس میں AB اور CD متوازی ہیں۔ AB کے متوازی کھینچا ہوا ایک خط AD کو P پر اور BC کو Q پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$



6. نقشہ میں $QK \parallel PC$ اور $HK \parallel BC$ ہے۔ اگر $AQ = 6$ cm ، $QH = 4$ cm ، $HP = 5$ cm ، $KC = 18$ cm ہو تو AK اور PB معلوم کرو۔



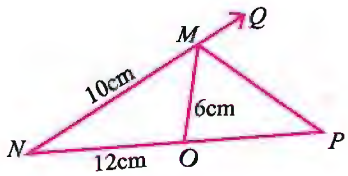
7. خاکہ میں $AQ \parallel DE$ اور $AR \parallel DF$ ہے۔
ثابت کرو کہ $QR \parallel EF$ ہے۔



8. نقشہ میں $AB \parallel DE$
اور $AC \parallel DF$ ہے۔
ثابت کرو کہ $BC \parallel EF$۔

9. ΔABC میں $\angle A$ کا اندرونی ناصف AD ، BC کو D پر ملتا ہے۔
(i) اگر $BD = 2$ cm ، $AB = 5$ cm ، $DC = 3$ cm ہو تو AC معلوم کرو۔
(ii) اگر $AB = 5.6$ cm ، $AC = 6$ cm ، $DC = 3$ cm ہو تو BC معلوم کرو۔
(iii) اگر $AB = x$ ، $AC = x - 2$ ، $BD = x + 2$ اور $DC = x - 1$ ہو تو x معلوم کرو۔

10. ذیل میں ہر ایک کے لئے جانچ کیجئے کہ ΔABC میں کیا AD ، $\angle A$ کا ناصف ہے
(i) $AB = 4$ cm ، $AC = 6$ cm ، $BD = 1.6$ cm اور $CD = 2.4$ cm
(ii) $AB = 6$ cm ، $AC = 8$ cm ، $BD = 1.5$ cm اور $CD = 3$ cm



11. ایک ΔMNO میں $\angle M$ کا بیرونی ناصف MP ہے
جو درازکردہ NO کو P پر ملتا ہے۔ اگر $MN = 10$ cm ، $MO = 6$ cm ،
$NO = 12$ cm ہو تو OP معلوم کرو۔

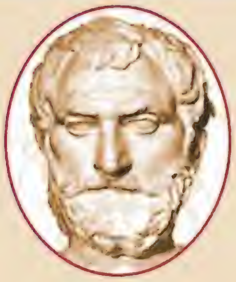
12. ایک چارضلعی $ABCD$ میں $\angle B$ اور $\angle D$ کے ناصف AC کو E پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

13. ΔABC میں $\angle A$ کا اندرونی ناصف BC کو D پر ملتا ہے اور $\angle A$ کا بیرونی ناصف درازشدہ BC کو E پر ملتا ہے۔
ثابت کرو کہ $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$.

14. $ABCD$ ایک چارضلعی ہے جس میں $AB = AD$ ہے۔ اگر AE اور AF ، بالترتیب $\angle BAC$ اور $\angle DAC$
کے اندرونی ناصف ہوں تو ثابت کرو کہ $BD \parallel EF$ ۔

6.3 متشابہ مثلثیں (Similar triangles)

آٹھویں جماعت میں ہم متماثل مثلثوں کے بارے میں وسیع طور پر مطالعہ کر چکے ہیں۔ہم جان چکے ہیں کہ دو ہندسی شکلیں متماثل ہوتی ہیں اگر ان کی شکل اور جسامت مساوی ہو۔اس حصّہ میں ہم ان ہندسی شکلوں کے بارے میں مطالعہ کریں گے جن کی شکل یکساں ہوگی مگر یہ ضروری نہیں کہ ان کی جسامت مساوی ہو۔اس طرح کی ہندسی شکلیں متشابہ کہلاتی ہیں۔



ملٹیس کا تھیلس
(Thales of Miletus)
(624-546 ق م.) یونان

تھیلس ایک مشہور فلسفی، سائنس داں اور ریاضی داں تھے۔علمِ ہندسہ میں منطقی نتائج کے استعمال کرنے کا طریقہ انہیں کے سَر جاتا ہے انہوں نے علمِ ہندسہ میں کئی پیش حالتوں کو دریافت کیا۔ان کا مسئلوں کو کرنے کا طریقہ، کئی ریاضی دانوں کو متوجہ کیا۔انہوں نے 585 قبلِ مسیح میں سورج گرہن کی پیشین گوئی بھی کی تھی۔

ہم اطراف و اکناف پر نظر ڈالتے ہیں تو ہم بہت سی اشیاء دیکھتے ہیں جن کی شکلیں مساوی ہوتی ہیں مگر ان کی جسامت یکساں یا مختلف ہوتی ہے۔مثال کے طور پر ایک درخت کے پتّے تقریباً یکساں شکل کے ہوتے ہیں مگر ان کی جسامت یکساں یا مختلف ہوتی ہے۔اسی طرح ایک ہی نیگیٹیو (negative) سے تیار کی ہوئی تصویریں ایک ہی شکل کی ہوتی ہیں مگر ان کی جسامت (size) مختلف ہوتی ہیں۔وہ تمام اشیاء جن کی شکل یکساں مگر جسامت مختلف ہوں، **متشابہ اشیاء** کہلاتی ہیں۔

کہا جاتا ہے کہ **تھیلس** نے یونان میں علمِ ہندسہ کا تعارف کرایا۔انہوں نے اہرام مصر کی اونچائیوں کو، ان کے سایوں (shadows) اور متشابہ مثلثوں کے اصول کی مدد سے دریافت کی۔اس طرح متشابہ مثلثوں کی مدد سے بلندی اور فاصلہ کو ناپنا ممکن ہوا۔

انہوں نے مشاہدہ کیا کہ مساوی الساقین مثلثوں کے قاعدے کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔انہوں نے متشابہ مثلثوں اور قائمۃ الزاویہ مثلثوں کے تصوّر کو عملی علمِ ہندسہ میں استعمال کیا یہ حقیقت ہے کہ متماثل مثلثیں متشابہ ہوتے ہیں مگر اس کا برعکس درست نہیں ہے۔ اس حصّہ میں ہم صرف متشابہ مثلثوں پر بحث کریں گے۔ ان کے استعمال سے مسئلوں کا حل نکالیں گے۔ ذیل کی معمولی کارروائی سے ہمیں متشابہ مثلثوں کو ذہن نشین کرنے میں مدد ملے گی۔

کارروائی

- ایک کارڈبورڈ لیجئے اور اس میں ایک مثلثی سوراخ بنائیے۔
- اس کارڈبورڈ کو زمین سے تقریباً ایک میٹر اوپر سورج کی روشنی میں رکھئے۔
- اب اس کو زمین کی جانب نیچے لائیے اور زمین پر بننے والے مثلث کے کئی شکلوں کے سلسلے دیکھئے۔
- زمین کے قریب لانے سے خیال چھوٹا ہوتا جاتا ہے اور زمین سے دور لے جانے پر خیال (image) بڑا ہوتا جاتا ہے۔
- آپ دیکھتے ہیں کہ تینوں راس سے بننے والے زاویے ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں حالانکہ ان کی جسامت مختلف ہوتی ہے۔

تعریف

دو مثلث متشابہ ہوں گے، اگر

(i) ان کے نظیری زاویے مساوی ہوں

(ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت میں تناسب پایا جاتا ہو یا

دیگر الفاظ میں یوں کہا جاسکتا ہے کہ ایک مثلث کی تکبیری شکل دوسرا مثلث ہے۔

لہٰذا دو مثلثیں ΔABC اور ΔDEF متشابہ ہوں گے اگر

(i) $\angle A = \angle D, \ \angle B = \angle E, \ \angle C = \angle F$ (یا)

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$.

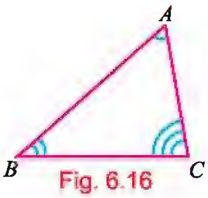


Fig. 6.16

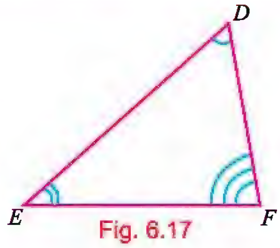


Fig. 6.17

یہاں راسیں A ، B ، اور C راسیں بالترتیب D ، E اور F سے مطابقت رکھتے ہیں۔ ان دو مثلثوں کی متشابہت کو ہم اس طرح لکھتے ہیں :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ اور اس کو ΔABC متشابہ ہے ΔDEF کے۔ نشان " ~ " کے معنے "کے مشابہ ہے" ہے۔

برائے ذہن نشینی

ΔABC اور ΔDEF کی مشابہت کو علامتی طور پر دوسرے طریقوں سے درست مطابقت استعمال کرتے ہوئے اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔ جیسے $\Delta BCA \sim \Delta EFD$ اور $\Delta CAB \sim \Delta FDE$

6.3.1 مثلثوں کی متشابہت کے اصول

دو مثلثوں کی متشابہت کو ثابت کرنے کے لئے ذیل کے تین اصول کافی ہیں۔

(i) AA (Angle - Angle) زاویہ ۔ زاویہ مشابہت کا اصول

اگر کسی ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تو وہ دونوں مثلث متشابہ ہوں گے۔

برائے ذہن نشینی

اگر ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تو ان کے تیسرے زاویے بھی مساوی ہوں گے۔
لہٰذا AA متشابہت کا اصول کو AAA اصول بھی کہا جاتا ہے۔

(ii) SSS (side - side - side) ضلع ۔ ضلع ۔ ضلع مشابہت کا اصول

دو مثلثوں میں اگر ایک مثلث کے اضلاع ، دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہوں (مساوی نسبت پائی جائے) تو ان کے نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں اور لہٰذا دونوں مثلثیں متشابہ ہوتے ہیں۔

(iii) SAS (side - angle - side) ضلع ۔ زاویہ ۔ ضلع مشابہت کا اصول

ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور ان زاویوں کو بنانے والے نظیری اضلاع متناسب ہوں تو یہ دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔

آ یئے اب ہم مثلثوں کی مشابہت پر چند نتائج بغیر ثبوت کے درج کریں۔

(i) دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں میں نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کے مساوی ہوتی ہے

(ii) اگر ایک مثلثِ قائمۃ الزوایہ کے راس سے اس کے وتر پر ایک عمود ڈالا جائے تو عمود کے دونوں جانب بننے والے مثلث پورے مثلث کے متشابہ ہوتے ہیں۔

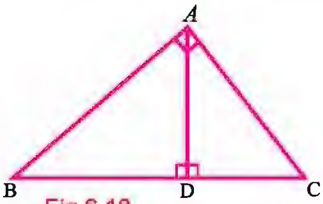


Fig.6.18

یہاں (a) $\Delta DBA \sim \Delta ABC$

(b) $\Delta DAC \sim \Delta ABC$

(c) $\Delta DBA \sim \Delta DAC$

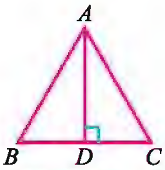


Fig.6.19

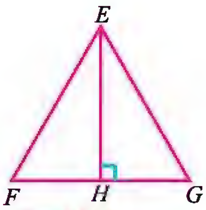


Fig.6.20

(iii) اگر دو مثلث متشابہ ہوں تو ان کے نظیری اضلاع کی نسبت اور ان کے نظیری ارتفاعوں میں مساوی نسبت پائی جاتی ہے۔

یعنی اگر $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ ہو تو ، $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{CA}{GE} = \dfrac{AD}{EH}$

(iv) اگر دو مثلث متشابہ ہوں تو ان کے نظیری اضلاع کی نسبت ان کے نظیری احاطہ کے مساوی ہوتے ہیں۔

اگر $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ہو تو، $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}.$

مثال 6.8

ΔPQR میں $QR \parallel AB$ ہے۔ اگر AB 3 سمر ہو، PB 2 سمر ہو اور PR 6 سمر ہو تو QR کی لمبائی معلوم کرو۔

حل : دیا گیا ہے کہ AB 3 سمر ہے، PB 2 سمر ہے

اور PR 6 سمر ہے اور $QR \parallel AB$ ہے۔

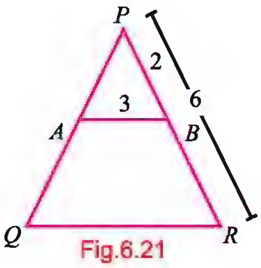


Fig.6.21

ΔPQR اور ΔPAB میں $\angle PAB = \angle PQR$ (نظیری زاویے)

$\angle P$ مشترک ہے $\therefore \ \Delta PAB \sim \Delta PQR$ (AA مشابہت کا اصول)

چونکہ نظیری اضلاع متناسب ہیں۔

$$\frac{AB}{QR} = \frac{PB}{PR}$$

$$QR = \frac{AB \times PR}{PB}$$

$$= \frac{3 \times 6}{2}$$

اس طرح $QR = 9$ cm

مثال 6.9

1.8 میٹر اونچا شخص ایک اہرام (pyramid) کے نزدیک کھڑا ہوا ہے۔ اگر اس شخص کے سایہ کی لمبائی 2.7 m ہے اور اہرام کے سائے کی لمبائی اس وقت 210 m ہو تو اہرام کی اونچائی معلوم کرو۔

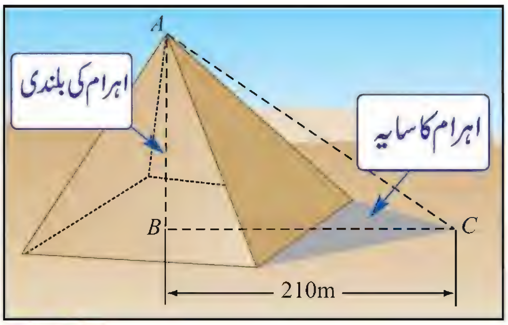


Fig. 6.22

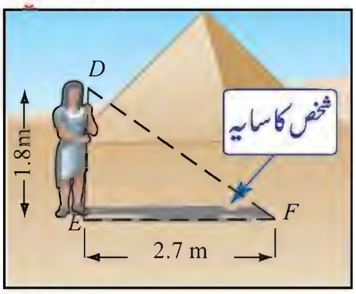


Fig. 6.23

حل :

فرض کرو اہرام کی اونچائی اور شخص کی اونچائی بالترتیب AB اور DE ہیں۔

فرض کرو اہرام اور شخص کے سایوں کی لمبائیاں بالترتیب BC اور CF ہیں۔

ΔABC اور ΔDEF میں

$$\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$$

$$\angle BCA = \angle EFD$$

(ایک مقررہ وقت پر زاویہ فراز مساوی ہوتا ہے)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (AA مشابہت کا اصول)

لہٰذا

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{1.8} = \frac{210}{2.7} \quad \Longrightarrow AB = \frac{210}{2.7} \times 1.8 = 140.$$

لہٰذا اہرام کی اونچائی 140 m ہے۔

مثال 6.10

ایک شخص آئینہ میں ایک مینار کی چوٹی کو دیکھتا ہے جو مینار سے 87.6 m کے فاصلہ پر ہے۔ آئینہ زمین پر ہے جس کا رخ اوپر کی جانب ہے وہ شخص آئینہ سے 0.4 m دور ہے اور اس کی آنکھوں کا فاصلہ زمین سے 1.5 m ہے۔ مینار کتنا اونچا ہے ؟ (اُس شخص کا قدم، آئینہ اور مینار کا قاعدہ ایک خطِ مستقیم میں واقع ہے)

حل : فرض کرو AB اور DE بالترتیب آدمی اور مینار کی اونچائی ہے۔

فرض کرو آئینہ میں مینار کا نقطۂ وقوع (Point of incidence) C ہے۔

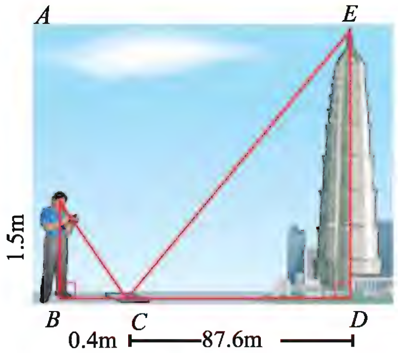


Fig. 6.24

ΔABC اور ΔEDC میں

$$\angle ABC = \angle EDC = 90^\circ$$

$$\angle BCA = \angle DCE$$

(ایک مقررہ وقت میں زاویہ فراز مساوی ہوتا ہے)

(یعنی زاویہ وقوع اور زاویہ انعکاس مساوی ہوتے ہیں)

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (AA مشابہت کا اصول)

$$\therefore \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC} \quad \text{(نظیری اضلاع متناسب ہوتے ہیں)}$$

$$ED = \frac{DC}{BC} \times AB = \frac{876}{0.4} \times 1.5 = 328.5$$

لہٰذا مینار کی اونچائی 328.5 میٹر ہے.

مثال 6.11

ایک کیمرہ کے فلم میں ایک درخت کا خیال کی لمبائی 35 mm ہے۔فلم اور عدسہ کا فاصلہ 42 mm ہے اور عدسہ سے درخت کا فاصلہ 6 m ہے۔ تصویر لئے گئے درخت کے حصہ کی اونچائی معلوم کرو۔

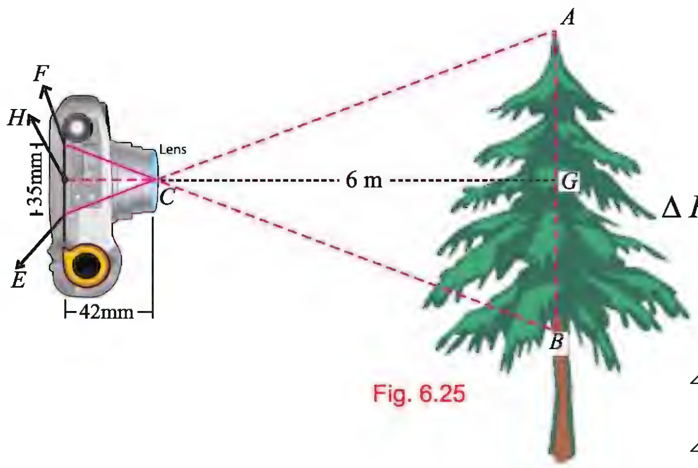


Fig. 6.25

حل : فرض کرو AB اور EF بالترتیب درخت کے حصّہ کی اونچائی اور فلم میں خیال کی اونچائی ہے۔

فرض کرو نقطہ $'C'$ عدسہ کی نشان دہی کرتا ہے

فرض کرو CG اور CH بالترتیب ΔACB اور ΔFEC کے ارتفاع ہیں۔صاف ظاہر ہے کہ $AB \parallel FE$

ΔACB اور ΔFEC میں $\angle BAC = \angle FEC$

$\angle ECF = \angle ACB$ (عمودی مقابل زاویے)

$\therefore\ \Delta ACB \sim \Delta ECF$ (AA کی مشابہت کا اصول)

لہٰذا $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{CG}{CH}$

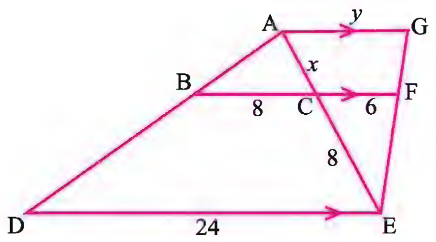
$$\Longrightarrow\ AB = \frac{CG}{CH} \times EF = \frac{6 \times 0.035}{0.042} = 5$$

تصویر لئے درخت کے حصے کی اونچائی 5 m ہے۔

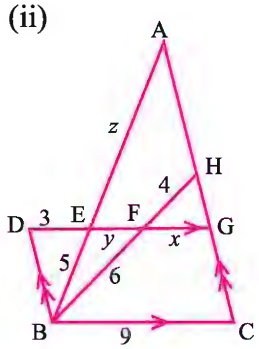
مشق 6.2

1. ذیل میں نامعلوم قیمتیں معلوم کرو۔تمام لمبائیاں سنٹی میٹر میں دی گئی ہیں (تمام پیمائشیں اسکیل کے تحت نہیں ہیں)

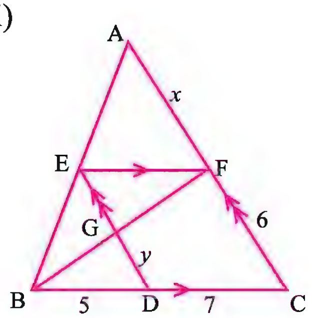
(i)



(ii)

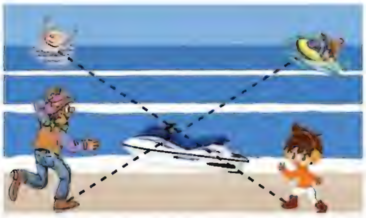


(iii)



2. 1.8 m اونچے ایک شخص کا خیال فلم میں 1.5 cm طول کا ہے۔اگر فلم کیمرہ کے عدسہ سے 3 cm کے فاصلہ پر ہو تو وہ شخص کیمرے سے کتنے فاصلہ پر ہے ؟

3. 120 cm اونچی ایک لڑکی ایک لیمپ کے کھمبے (lamp post) کے قاعدے سے 0.6 میٹر فی سکنڈ کی رفتار سے دور جارہی ہے۔ اگر لیمپ (چراغ) سطحِ زمین سے 3.6 m اوپر ہو تو 4 سکنڈ کے بعد اس کے سائے کی لمبائی معلوم کرو۔



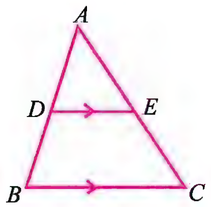
4. ایک لڑکی اپنے باپ کے ساتھ ساحلِ سمندر پر ہے وہ ایک تیراک کو ڈوبتے ہوئے دیکھتی ہے۔وہ اپنے باپ کو پکارتی ہے جو اس سے 50m مغربی سمت میں ہے۔اس کا باپ، لڑکی کی بہ نسبت ایک کشتی سے 10 میٹر قریب ہے۔اگر اس کا باپ کشتی استعمال کرے تو تیراک تک پہنچنے میں 126 m کا فاصلہ طے کرنا پڑے گا۔ اسی وقت وہ لڑکی آبی ناؤ (water craft) پر سوار ایک شخص کو دیکھتی ہے جو کشتی سے 98 m دور ہے۔وہ شخص تیراک سے مشرقی سمت میں ہے۔اس شخص کو تیراک کو بچانے کے لئے کتنا فاصلہ طے کرنا ہوگا ؟ (اشارہ :تصویر دیکھئے)

5. ΔABC میں اضلاع AB اور AC پر نقاط بالترتیب P اور Q ہیں۔اگر $AP = 3$ cm ، $PB = 6$ cm ، $AQ = 5$ cm اور $QR = 10$ cm ہو تو ثابت کرو کہ $BC = 3\,PQ$

6. ΔABC میں $AB = AC$ اور $BC = 6$ cm۔ضلع AC پر ایک نقطہ D ہے اس طرح کہ $AD = 5$ cm اور $CD = 4$ cm ہے۔ثابت کرو کہ $\Delta BCD \sim \Delta ACB$ اور لہٰذا BD معلوم کرو۔

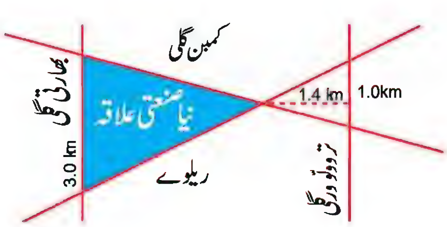
7. ΔABC میں AB اور AC پر نقاط بالترتیب E اور D ہیں اس طرح کہ $BC \parallel DE$ ہے۔اگر $AB = 3\,AD$ اور ΔABC کا رقبہ 72 cm² ہو تو چار ضلعی $DBCE$ کا رقبہ معلوم کرو

8. مثلث ABC کے تین اضلاع کے طول 6 cm ، 4 cm اور 9 cm ہیں ۔ $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ ہے ۔ ΔPQR کے ایک ضلع کی لمبائی 35 cm ہے ۔ ΔPQR کا زیادہ سے زیادہ ممکن احاطہ کتنا ہے ؟

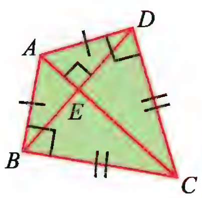


9. خاکہ میں $DE \parallel BC$ اور $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$ ہو تو ذیل کی قیمتیں محسوب کیجئے۔

(i) $\dfrac{\Delta ADE \text{ کا رقبہ}}{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}$ (ii) $\dfrac{\text{منحرف } BCED \text{ کا رقبہ}}{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}$

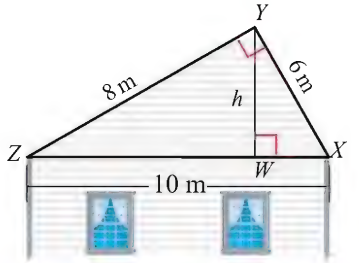


10. شہر کے بغیر استعمال کئے ہوئے حصّہ کو حکومت ایک نیا صنعتی علاقہ میں ترقی دینا چاہتی ہے۔ دائیں جانب نقشہ میں سیاہ کردہ حصّہ نئے صنعتی علاقہ کی نشاندہی کرتا ہے۔ نئے صنعتی علاقے کا رقبہ معلوم کرو۔



11. ایک لڑکا ہیرے کی شکل کے پتنگ کا ایک ڈیزائن بناتا ہے جیسا کہ خاکہ میں بتلایا گیا ہے جس میں $AE = 16$ cm، $EC = 81$cm
وہ ایک آڑی کاڑی BD استعمال کرنا چاہتا ہے۔اسکی لمبائی کیا ہونی چاہئے ؟

12. ایک طالبِ علم ایک جھنڈے کے مستول کی بلندی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ وہ زمین پر ایک چھوٹا آئینہ رکھتا ہے تاکہ وہ جھنڈے کے مستول کے سرے کا عکس دیکھ سکے۔ آئینہ سے اس کا فاصلہ 0.5 میٹر اور آئینہ سے جھنڈے کے مستول کا فاصلہ 3 میٹر ہے۔ اگر اس کی آنکھ سطحِ زمین سے 1.5 میٹر اوپر ہو تو جھنڈے کے مستول کی بلندی معلوم کرو۔
(طالبِ علم کا قدم، آئینہ اور جھنڈے کے مستول کا قدم ایک ہی خطِ مستقیم پر ہیں)



13. خاکہ میں ایک چھت کی عمودی تراش دکھلائی گئی ہے۔
(i) متشابہ مثلثوں کی نشاندہی کرو۔
(ii) چھت کی بلندی h معلوم کرو۔

مسئلہ 6.6 مسئلہ فیثا غورث (باندھاین کا مسئلہ) [Pythagoras theorem (Bandhayan theorem)]

کسی مثلث قائمۃ الزاویہ میں وتر کا مربع اس کے دوسرے اضلاع کے مربعوں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہوتا ہے۔

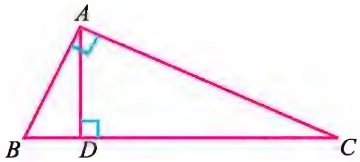


Fig.6.26

دیا گیا ہے : قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle A = 90^\circ$

ثابت کرنا ہے : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

تصنیف : $AD \perp BC$ کھینچو

ثبوت

مثلث ABC اور مثلث DBA میں $\angle B$ مشترک زاویہ ہے

نیز $\angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$

$\therefore \; \Delta ABC \sim \Delta DBA$ (AA اصول زاویہ۔زاویہ اصول)

لہٰذا ان کے نظیری اضلاع میں تناسبیت پائی جاتی ہے

اس طرح $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{BA}$

$\therefore \; AB^2 = DB \times BC$ (1)

اس طرح $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.

لہٰذا $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{DC}$

$\therefore \; AC^2 = BC \times DC$ (2)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times DC$$
$$= BC(BD + DC)$$
$$= BC \times BC = BC^2$$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ مسئلہ فیثا غورث ثابت ہوا

برائے ذہن نشینی

مسئلہ فیثا غورث کے دو بنیادی پہلو ہیں۔ ایک رقبوں سے متعلق ہے اور دوسرا المبائیوں سے متعلق ہے۔ لہٰذا یہ مسئلہ علمِ ہندسہ اور الجبرا کا ایک بہترین سنگ میل ہے۔ مسئلہ فیثا غورث کا برعکس بھی درست ہے۔ اس کو پہلے پہل اقلیدس نے ذکر کیا اور ثابت کیا۔

بیان (statement) ذیل میں درج ہے۔ (ثبوت بطورِ مشق دیا گیا ہے)

مسئلہ 6.7 **مسئلہ فیثا غورث کا برعکس**

کسی مثلث میں اگر ایک ضلع کا مربع دوسرے اضلاع کے مربعوں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہو تو پہلے ضلع کے مقابل کا زاویہ، زاویۂ قائمہ ہے۔

6.4 دائرے اور مماس

ایک خطِ مستقیم جو ایک دائرہ سے تعلق رکھتا ہے ، اور دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر مَس کرتا ہے مماس کہلاتا ہے۔ علمِ ہندسہ میں دائرہ کا مماس کئی ہندسی تصیفات اور ثبوت کے مہیّا کرنے میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ اس حصّہ میں ہم دائرے اور مماسوں کی بنیاد پر چند نتائج بیان کریں گے اور ایک اہم مماس۔ وتر کے مسئلہ کا ثبوت پیش کریں گے۔ اگر ہم ایک سطح پر ایک دائرہ اور خطِ مستقیم پر غور کریں تو اس کے تین ممکنات ہیں۔ وہ ایک دوسرے کو قطع نہ کریں، دو دو نقطوں پر قطع کریں یا وہ صرف ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو مَس کریں۔ اب درج ذیل خاکوں پر غور کریں۔

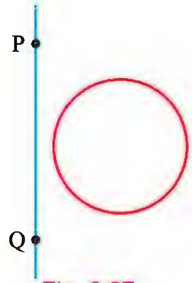


Fig. 6.27

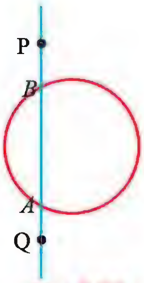


Fig. 6.28

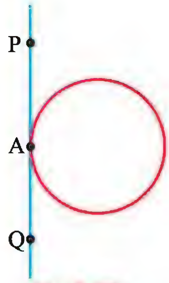


Fig.6.29

خاکہ 6.27 میں دائرہ اور خطِ مستقیم PQ کا کوئی مشترک نقطہ نہیں ہے۔

خاکہ 6.27 میں خطِ مستقیم PQ دائرے کو دو مختلف نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔ اس صورت میں PQ کو دائرہ کا قاطع (secant) کہا جاتا ہے۔

خاکہ 6.29 میں خطِ مستقیم PQ اور دائرہ کا صرف ایک مشترک نقطہ ہے۔ یعنی خطِ مستقیم، دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر مَس کرتا ہے۔ خطِ مستقیم PQ کو A پر دائرہ کا مماس کہتے ہیں۔

تعریف

ایک خطِ مستقیم جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر مَس کرتی ہے، دائرہ کا مماس کہلاتی ہے۔ اور جس نقطہ پر وہ دائرہ کو مَس کرتی ہے ، اس نقطہ کو نقطۂ تماس (point of contact) کہتے ہیں۔

دائرے اور مماسوں کی بنیاد پر چند مسئلے (ثبوت کے بغیر)

1. نقطۂ تماس (point of contact) پر دائرہ کے مماس اور نصف قطر عمودی ہوتے ہیں۔
2. دائرہ پر ایک نقطہ سے صرف ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے۔ لیکن دائرے کے بیرونی نقطہ سے دائرے پر دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔
3. دائرے کے بیرونی نقطہ سے دائرے پر کھینچے ہوئے دو مماسوں کی لمبائیاں مساوی ہوتی ہیں۔
4. اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مَس کرتے ہیں تو دائروں کا نقطۂ تماس ، دائروں کے مرکز کو ملانے والے پر ہوتا ہے۔
5. اگر دو دائرے بیرونی جانب مَس کرتے ہیں تو ان کے مرکز کا درمیانی فاصلہ ان کے نصف قطروں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہوتا ہے۔
6. اگر دو دائرے اندرونی جانب مَس کرتے ہیں تو ان کے مرکز کا درمیانی فاصلہ ان کے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔

مسئلہ 6.8 مماس-وتر کا مسئلہ (Tangent - chord theorem)

اگر مماس کے نقطۂ تماس (دائرے کے) سے ایک وتر (chord) کھینچا جائے تو وتر اور مماس سے بننے والا زاویہ بالترتیب اس کے نظیری متبادل قطعہ (alternate segment) میں بننے والے زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔

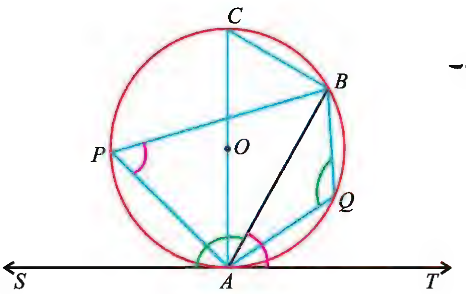


Fig. 6.30

دیا گیا ہے : دائرہ جس کا مرکز $'O'$ ہے۔ A پر مماس ST ، ہے اور وتر AB ہے۔
وتر AB کے مخالف جانب دائرہ پر دو نقاط P اور Q ہیں

ثابت کرنا ہے : (i) $\angle BAT = \angle BPA$ (ii) $\angle BAS = \angle AQB$.

تصنیف : دائرہ کا قطر AC کھینچو۔ B اور C کو ملاؤ۔

ثبوت

بیانات	وجوہات	
$\angle ABC = 90^\circ$	نصف دائرہ میں بننے والا زاویہ 90° ہے	
$\angle CAB + \angle BCA = 90^\circ$	ΔABC قائمۃ الزاویہ کے حادہ زاویوں کا مجموعہ	(1)
$\angle CAT = 90^\circ$	نقطۂ تماس پر قطر، مماس پر عمودی ہوتا ہے	
$\Longrightarrow \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$		(2)
$\angle CAB + \angle BCA = \angle CAB + \angle BAT$	(1) اور (2) سے	
$\Longrightarrow \angle BCA = \angle BAT$		(3)

(4)	ایک ہی قطعہ AB پر بننے والے زاویے	$\angle BCA = \angle BPA$
(5)	(3) اور (4) سے	لہٰذا $\angle BAT = \angle BPA$. (i).
	مدوّر چار ضلعی کے مقابل کے زاویے	یہاں پر $\angle BPA + \angle AQB = 180^\circ$
(6)	(5) سے	$\Longrightarrow \angle BAT + \angle AQB = 180^\circ$
(7)	خطی جوڑی زاویے	نیز $\angle BAT + \angle BAS = 180^\circ$
	(6) اور (7) سے	$\angle BAT + \angle AQB = \angle BAT + \angle BAS$
		لہٰذا $\angle BAS = \angle AQB$. (ii).

اس طرح مماس-وتر کا مسئلہ ثابت ہوا۔

مسئلہ 6.9 مماس-وتر کے مسئلہ کا معکوس

ایک دائرہ میں ایک وتر کے ایک حد نقطہ پر ایک خطِ مستقیم کھینچا جائے اس طرح کہ اس سے بننے والا زاویہ اگر متبادلہ قطعہ میں بننے والے زاویے کے مساوی ہو تو وہ خطِ مستقیم دائرہ پر مماس ہوتا ہے۔

تعریف

اگر قطاعِ خط AB پر ایک نقطہ P ہو تو $PA \times PB$ ایک مستطیل کے رقبہ کو ظاہر کرتا ہے جس کے اضلاع PA اور PB ہیں۔

یہ حاصلِ ضرب مستطیل کا رقبہ کہلاتا ہے جو قطاعِ خط AB کے حصّے PA اور PB سے بنتا ہے۔

مسئلہ 6.10

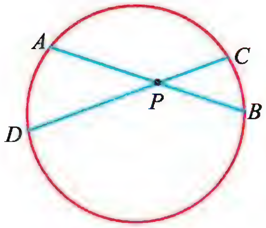


Fig. 6.31

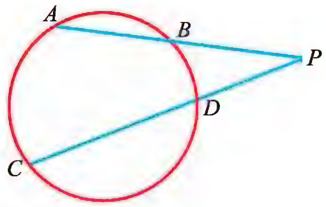


Fig.6.32

اگر کسی دائرے کے دو وتر اندرونی جانب یا بیرونی جانب قطع کریں تو ایک وتر کے حصّوں سے بننے والے مستطیل کا رقبہ دوسرے وتر کے حصّوں سے بننے والے مستطیل کے رقبہ کے مساوی ہوتا ہے۔

نقشہ 6.31 میں دو وتر AB اور CD دائرہ کے اندر P پر قطع کرتے ہیں جس کا مرکز 'O' ہے۔ $PA \times PB = PC \times PD$ ہے۔

نقشہ 6.32 میں دو وتر AB اور CD دائرہ کے باہر P پر قطع کرتے ہیں جس کا مرکز 'O' ہے۔ $PA \times PB = PC \times PD$ ہے

مثال 6.12

فرض کرو نقطہ A پر PQ دائرہ کا مماس ہے اور AB ایک وتر ہے۔ فرض کرو دائرہ پر ایک نقطہ 'C' اس طرح ہے کہ $\angle BAC = 54^\circ$ اور $\angle BAQ = 62^\circ$ ہے۔ $\angle ABC$ معلوم کرو

حل : چونکہ A پر PQ ایک مماس ہے اور AB ایک وتر ہے۔ اس لئے

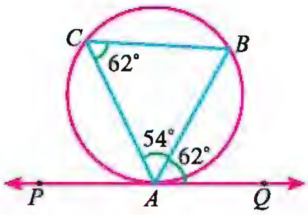


Fig. 6.33

$\angle BAQ = \angle ACB = 62°$. (مماس۔وتر کا مسئلہ)

Also, $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180°$.

(ایک مثلث کے تمام زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے)

نیز $\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle ACB)$

$= 180° - (54° + 62°) = 64°$.

مثال 6.13 ذیل کے ہر خاکہ میں x کی قیمت معلوم کرو

(i)

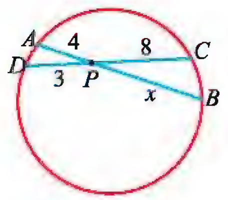


Fig 6.34

(ii)

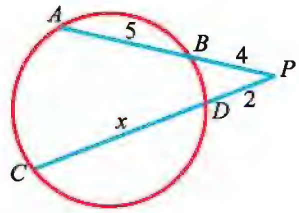


Fig. 6.35

(i) ہمیں معلوم ہے کہ $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$

$$PB = \frac{PCPD}{PA}$$

$$x = \frac{8 \times 3}{4} = 6.$$

(ii) ہمیں معلوم ہے کہ $PC \,.\, PD = PA \,.\, PB$

$$(2+x)\,2 = 9 \times 4$$

لہٰذا $x + 2 = 18$, $x = 16$.

مثال 6.14 شکل میں مرکز $'O'$ کے دائرہ پر بیرونی نقطہ P سے دو مماس PA اور PB کھینچے گئے ہیں۔ اگر E پر دائرہ کا مماس CD ہو اور $AP = 15$ cm ہو تو $\Delta\, PCD$ کا احاطہ معلوم کرو

حل : ہم جانتے ہیں کہ بیرونی نقطہ سے دائرے پر مماسوں کا طول مساوی ہوتا ہے

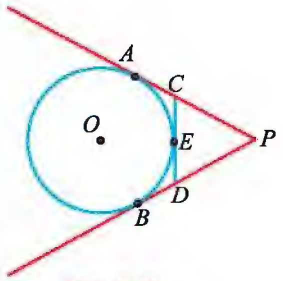


Fig. 6.36

$\therefore CA = CE, \quad DB = DE$ and $PA = PB$.

$\therefore$ کا احاطہ $\Delta\, PCD = PC + CD + DP$

$= PC + CE + ED + DP$

$= PC + CA + DB + DP$

$= PA + PB = 2\,PA \qquad (PB = PA)$

لہٰذا مثلث PCD کا احاطہ $= 2 \times 15 = 30$ cm.

مثال 6.15

$ABCD$ ایک چار ضلعی اس طرح سے ہے کہ اس کے تمام اضلاع ایک دائرہ کو مَس کرتے ہیں۔ اگر $AB = 6$ cm ، $BC = 6.5$ cm اور $CD = 7$ cm ہو تو AD کا طول معلوم کرو۔

حل : فرض کرو کہ نقاط P ، Q ، R اور S دائرہ پر چار ضلعی کو مَس کرتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ بیرونی نقطہ سے دائرہ پر مماسوں کی لمبائیاں مساوی ہوتی ہیں۔

چنانچہ ہمارے پاس ہے $AP = AS$, $BP = BQ$, $CR = CQ$, $DR = DS$.

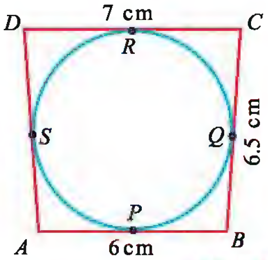


Fig. 6.37

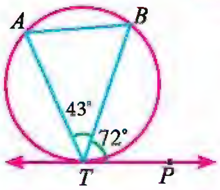
لہٰذا $AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$\Longrightarrow AB + CD = AD + BC.$

$\Longrightarrow AD = AB + CD - BC = 6 + 7 - 6.5 = 6.5$

لہٰذا $AD = 6.5$ cm.

مشق 6.3



1. خاکہ میں TP دائرہ کا مماس ہے۔ A اور B دائرہ پر دو نقاط ہیں۔
اگر $\angle BTP = 72°$ اور $\angle ATB = 43°$ ہوتو $\angle ABT$ معلوم کرو۔

2. AB اور CD دائرہ کے دووتر ہیں جو ایک دوسرے کو اندرونی جانب P پر قطع کرتے ہیں۔
(i) اگر $CP = 4$ cm ، $AP = 8$ cm ، $PB = 2$ cm ہو تو PD معلوم کرو۔
(ii) اگر $AP = 12$ cm ، $AB = 15$ cm ، $CP = PD$ ہو تو CD معلوم کرو۔

3. AB اور CD دائرہ کے دووتر ہیں جو ایک دوسرے کو بیرونی جانب P پر قطع کرتے ہیں۔
(i) اگر $AB = 4$ cm ، $BP = 5$ cm ، $PD = 3$ cm ہو تو CD معلوم کرو۔
(ii) اگر $BP = 3$ cm ، $CP = 6$ cm ، $CD = 2$ cm ہو تو AB معلوم کرو۔

4. ایک دائرہ ΔABC کے ضلع BC کو P پر مَس کرتا ہے اور درازکردہ AB اور AC کو بالترتیب Q اور R پر مَس کرتا ہے
ثابت کرو کہ : AQ = AR = ½(ΔABC کا احاطہ)

5. اگر ایک متوازی الاضلاع کے تمام اضلاع ایک دائرہ کو مَس کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ وہ متوازی الاضلاع ایک معین ہوگا۔

6. ایک تالاب میں ایک کنول پانی کی سطح سے 20 cm اوپر ہے اور اس ڈنڈی کا کچھ حصّہ پانی کی سطح کے نیچے ہے۔ہوا کے جھونکے سے ڈنڈی جھولنے لگتی ہے اور اس کے اصلی مقام سے 40 cm دور پانی کو چھوتی ہے۔شروع میں ڈنڈی کا کتنا حصّہ پانی کی سطح سے نیچے تھا؟

7. ایک مستطیل $ABCD$ کے اندرونی جانب نقطہ $'O'$ کو ہر ایک راس A ، B ، C اور D سے ملایا جاتا ہے۔ثابت کرو کہ
$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$

مشق 6.4

صحیح جواب کا انتخاب کرو :

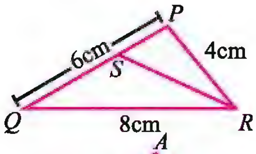
1. ایک خطِ مستقیم ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتی ہے اور وہ BC کے متوازی ہے تب $\frac{AE}{AC} =$

(A) $\frac{AD}{DB}$ (B) $\frac{AD}{AB}$ (C) $\frac{DE}{BC}$ (D) $\frac{AD}{EC}$

2. ΔABC میں $BC \parallel DE$ جو AB کو D اور E پر ملتا ہے اگر $AD = 3$ cm، $DB = 2$ cm اور $AE = 2.7$ cm ہو تو AC مساوی ہے

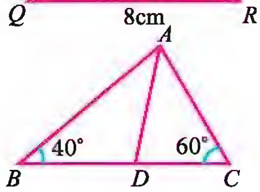
(A) 6.5 cm (B) 4.5 cm (C) 3.5 cm (D) 5.5 cm

3. ΔPQR میں $\angle R$ کا ناصف RS ہے۔ اگر $PQ = 6$ cm، $QR = 8$ cm، $RP = 4$ cm ہو تو PS مساوی ہے



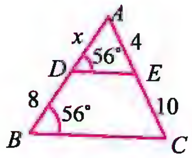
(A) 2 cm (B) 4 cm (C) 3 cm (D) 6 cm

4. شکل میں اگر $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$, $\angle B = 40°$ اور $\angle C = 60°$ ہو تو $\angle BAD =$



(A) $30°$ (B) $50°$ (C) $80°$ (D) $40°$

5. شکل میں x کی قیمت مساوی ہے



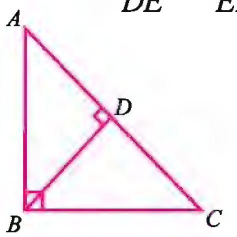
(A) $4 \cdot 2$ (B) $3 \cdot 2$

(C) $0 \cdot 8$ (D) $0 \cdot 4$

6. مثلث ABC اور DEF میں $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ ہو تو

(A) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{EF}$ (B) $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{FD}$ (C) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ (D) $\dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB}{EF}$

7. دیے ہوئے نقشہ کی مدد سے غلط عبارت کی نشاندہی کرو



(A) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (B) $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (D) $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

8. اگر 12 m لمبی عمودی لکڑی کا سایہ زمین پر 8 m پڑتا ہے۔ اسی وقت ایک مینار کے سایہ کی لمبائی 40 m ہو تو مینار کی اونچائی

(A) 40 m (B) 50 m (C) 75 m (D) 60 m

9. دو متشابہ مثلثوں کے اضلاع کی نسبت 2 : 3 ہو تو ان کے رقبوں کی نسبت

(A) 9:4 (B) 4:9 (C) 2:3 (D) 3:2

10. مثلث ABC اور DEF متشابہ ہیں۔ اگر ان کے رقبے بالترتیب 100 cm² اور 49 cm² ہو تو اور $BC = 8.2$ cm ہو تو، $EF =$

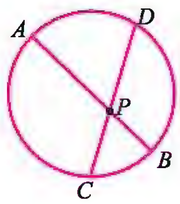
(A) 5.47 cm (B) 5.74 cm (C) 6.47 cm (D) 6.74 cm

11. دو متشابہ مثلثوں کے احاطے 24 cm اور 18 cm ہیں۔ اگر پہلے مثلث کا ایک ضلع 8 cm ہو تو دوسرے مثلث کے نظیری ضلع کی لمبائی

(A) 4 cm (B) 3 cm (C) 9 cm (D) 6 cm

12. ایک دائرہ کے دو وتر AB اور CD ہیں، جن کو دراز کرنے پر نقطہ P پر اس طرح ملتے ہیں کہ
$AB = 5$ ، $AP = 8$ اور $CD = 4$ ہو تو، $PD =$

(A) 12 (B) 5 (C) 6 (D) 4

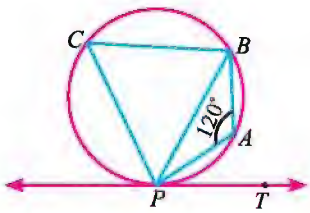


13. متصلہ شکل میں وتر AB اور CD نقطہ P پر قطع کرتے ہیں اگر $AB = 16$ cm ،
$PD = 8$ cm ، $PC = 6$ cm اور $AP > PB$ ہو تو $AP =$

(A) 8 cm (B) 4 cm (C) 12 cm (D) 6 cm

14. ایک دائرہ کے مرکز O سے ایک نقطہ P، 26 سمر دور ہے۔ P سے دائرے پر مماس PT کی لمبائی 10 سمر ہے تو OT مساوی ہے

(A) 36 cm (B) 20 cm (C) 18 cm (D) 24 cm

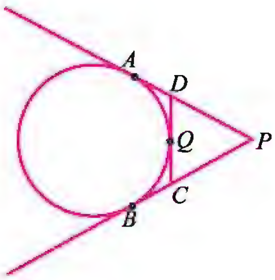


15. نقشہ میں اگر $\angle PAB = 120°$ ہو تو، $\angle BPT =$

(A) 120° (B) 30° (C) 40° (D) 60°.

16. اگر بیرونی نقطہ P سے مرکز $'O'$ رکھنے والے دائرہ پر مماس PA اور PB
ایک دوسرے سے زاویہ مائل $40°$ ہو تو $\angle POA =$

(A) 70° (B) 80° (C) 50° (D) 60°.



17. نقشہ میں بیرونی نقطہ P سے PA اور PB دائرے پر مماس ہیں۔
نیز Q پر CD ایک مماس ہے۔ اگر $PA = 8$ cm
اور $CQ = 3$ cm ہو تو PC مساوی ہے

A) 11 cm (B) 5 cm (C) 24 cm (D) 38 cm

18. ΔABC قائمۃ الزاویہ ہے جہاں $\angle B = 90°$ اور $BD \perp AC$, اگر $BD = 8$ cm ، $AD = 4$ cm ہو تو $CD=$

(A) 24 cm (B) 16 cm (C) 32 cm (D) 8 cm

19. دو متشابہ مثلثوں کے رقبے 16 cm^2 اور 36 cm^2 ہیں۔ اگر پہلے مثلث کا ارتفاع 3 cm ہو تو دوسرے مثلث کا نظیری ارتفاع

(A) 6.5 cm (B) 6 cm (C) 4 cm (D) 4.5 cm

20. دو مثلث ΔABC اور ΔDEF کے احاطے بالترتیب 36 cm اور 24 cm ہیں۔ اگر $DE = 10$ cm ہو تو AB

(A) 12 cm (B) 20 cm (C) 15 cm (D) 18 cm

7

علمِ مثلث

(TRIGONOMETRY)

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry – J.F. Herbart

⌘ تمہید
⌘ تماثلات
⌘ بُلندیاں اور فاصلے

ہپارکس
(190 - 120 B. C)
یونان

انہوں نے علم مثلث، علم مثلث کی جدولوں اور کروی علم مثلث کے کئی مسئلوں کو فروغ دیا۔ ان کے شمسی اور قمری مسئلوں سے انہوں نے سب سے پہلے سورج گرہن کی پیشین گوئی کے قابل اعتبار طریقہ کو بتلایا۔

انہوں نے کئی فلکیاتی آلے ایجاد کئے جن کے ذریعہ کئی زمانے تک فلکی اجسام کا برہنہ آنکھوں سے مشاہدہ کیا جاتا تھا۔

7.1 تمہید :

علمِ مثلث کو سب سے پہلے قوس اور وتروں کے درمیانی تعلق کے اظہار کے لئے استعمال کیا جاتا تھا۔ پندرھویں صدی کے بعد علمِ مثلث کو استعمال کر کے مثلث کے اندر کے زاویوں اور ضلعوں کی پیائش کے لئے استعمال کیا گیا۔ علم مثلث کی تخلیق کا سہرا دوسری صدی ق.م. کے یونان کے ریاضی دان ہپارکس کے سر جاتا ہے۔ علم مثلث کے معنی مثلث کی پیائش کے ہیں۔ بارتھولوماس پٹِس کس نے اسے علم مثلث کا نام دیا (1561-1613) ۔

نویں جماعت میں علمِ مثلث کی نسبتوں، اور ان کے آپسی تعلق اور علم مثلث کی جدول کو استعمال کرتے ہوئے ان کی پیائش کس طرح کی جاتی ہے، اس کے بارے میں معلومات حاصل کی تھیں۔

اس باب میں ہم علم مثلث کی تماثلات، علم مثلث کی نسبتوں کو استعمال کرتے ہوئے پہاڑوں، عمارتوں کی بلندی اور فاصلوں کو حقیقی معنوں میں پیائش کئے بغیر پیائش کرنا سیکھیں گے۔

7.2 علمِ مثلث کے تماثلات (Trigonometric Identities)

ہمیں معلوم ہے کہ مساوات اسی وقت تماثل کہلائے گی جب اس مساوات کے تمام متغیرات اس مساوات کی شرط پوری کرتے ہوں۔ مثال کے طور پر مساوات $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ایک حقیقی تماثل ہے کیوں کہ اس میں a اور b کی تمام قیمتیں حقیقی ہیں۔

اسی طرح ایک مساوات جس میں مثلث کے زاویوں کی حقیقی نسبتیں ہوں تو اُسے علم مثلث کے تماثل کہیں گے۔ مثال کے طور پر

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 4\sin\theta\cos\theta$$

ایک علم مثلث کی تماثل ہے جس میں θ کی تمام قیمتیں حقیقی ہوں گی۔

مساوات $(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$ علم مثلث کی تماثل نہیں رکھتی کیونکہ جب $\theta = 0°$ ہوتو یہ درست نہیں ہے۔اور

اگر $\theta = 45°$ ہوتو $(\sin 45° + \cos 45°)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \neq 1$

اس حصّے میں علم مثلث کے تماثلات اور مساوات واضح ہوں گے اور متغیر کی قیمتیں معنی خیز سمجھے جائیں گے۔

ہم تین ضروری متماثلوں کو لیں، جوفیثا غورثی تماثلات کہلائیں گے، اوران کو بعض دیگر تماثلوں کو حاصل کرنے کے لئے استعمال کریں گے۔

ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ABC میں، ہمیں حاصل ہوگا۔

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

(1) کی ہرایک رقم کو AC^2 سے تقسیم کرنے پرہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

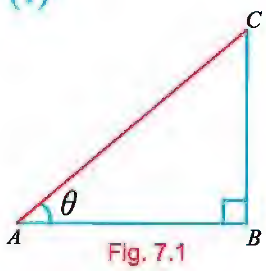


Fig. 7.1

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \qquad (AC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

یعنی $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

فرض کریں کہ $\angle A = \theta$ ہوتو $0° < \theta < 90°$ کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad ......(2)$$

$\cos^2 0° + \sin^2 0° = 1$ اور $\cos^2 90° + \sin^2 90° = 1$ مساوی ہیں،اس لئے مساوات (2) صحیح ہے۔

θ کی تمام قیمتوں کے لئے اس طرح کہ $0° \leq \theta \leq 90°$

مساوات (1) کو AB^2 سے تقسیم کرنے پرہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \qquad (\because) AB \neq 0$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \implies 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

$\tan\theta$ اور $\sec\theta$ میں $\theta = 90°$ غیرواضح ہے، θ کی تمام قیمتوں کے لئے تماثل (3) درست ہے اس طرح کہ $0° < \theta < 90°$

مساوات (1) کو BC^2 سے تقسیم کرنے پرہمیں

$$\leq \quad \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \qquad (\because)\ BC \neq 0$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \implies \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

$\cot\theta$ اور $\operatorname{cosec}\theta$ میں $\theta = 0°$ غیرواضح ہیں، تماثل (4)، θ کی تمام قیمتوں کے لئے اس طرح کہ $0° \leq \theta \leq 90°$ درست ہے۔

(2) سے (4) تک کی تماثلات نیچے دی ہوئی ہیں۔

	تماثل	مساوی شکلیں
(i)	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (or) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(ii)	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (or) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
(iii)	$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$	$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (or) $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

برائے ذہن نشینی

ہم نے یہ ثابت کیا ہے کہ درج بالا تماثلات θ کے ایک زاویہ حادہ کے لئے ہیں۔اور یہ تماثلات علم مثلث کے تمام معنی خیز θ کے زاویوں کے لئے درست ہیں۔اس باب میں ہم صرف زاویہ حادّہ کے بارے میں بحث کریں گے۔

عام طور پر علم مثلث کے افعال کے ذریعے علم مثلث کی تماثلات کو حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے۔

(i) تماثلات کو اچھی طرح سمجھ کر ہمیں کونسا حل حاصل کرنا ہے،اس کے مطابق مناسب عمل کرنا چاہئے۔

(ii) سب سے پہلے پیچیدہ حصے کو مختصر کرنے کی کوشش کرنا چاہئے کیونکہ ایسا کرنا آسان ہے یا مختصر طریقہ کو پھیلانا چاہئے۔

(iii) اگر دونوں طرف پیچیدہ حصے ہوں تو ہر ایک کو آزادانہ طور پر ان تماثلات کو الگ الگ مختصر کرنا چاہئے۔

(iv) عبارتوں کو جمع کرنا ہو تو کسروں کو الجبریائی طریقہ سے جمع کریں۔

(v) اگر ضرورت پڑے تو sine اور cosine کی معادلوں کو استعمال کرکے انہیں مختصر کرنا چاہئے۔

(vi) اگر تماثلات میں رقمیں $\tan^2\theta$ ، $\cot^2\theta$ ، $\operatorname{cosec}^2\theta$ ، $\sec^2\theta$ ہو تو اس کو ان کی دیگر معادلوں کو استعمال کرکے آسانی سے حل کرسکتے ہیں۔

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ اور $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.

مثال 7.1

ثابت کرو کہ متماثل $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

حل :

یہاں پر

$$\frac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

مثال 7.2

ثابت کرو کہ متماثل $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

Solution حل : فرض کریں کہ

Consider $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} \times \dfrac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad (1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\ .$$

مثال 7.3

ثابت کرو کہ متماثل $[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta] = 1$

حل : یہاں پر

$$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta]$$

$$= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \qquad \because \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta \quad \because \sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) = 1$$

مثال 7.4

ثابت کرو کہ $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

حل : ہم اس طرح فرض کریں کہ

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta \quad 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta \quad 1} \qquad (\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad (a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta + 1)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

مثال 7.5

ثابت کرو کہ تماثل $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta$.

حل : یہاں پر

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta}{1-\dfrac{1}{\tan\theta}}+\frac{\dfrac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\theta}{\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta}}+\frac{\dfrac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{(-\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}-\frac{1}{(\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\left(\tan^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\ \frac{(\tan^3\theta-1)}{\tan\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1^2)}{(\tan\theta-1)\tan\theta}\qquad(\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2))$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\tan\theta+1+\cot\theta$$

$$=1+\tan\theta+\cot\theta.$$

مثال 7.6

ثابت کرو کہ تماثل

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta\ .$$

حل : فرض کریں کہ

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta+2\cos\theta\sec\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta+2\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}+2\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1+(1+\cot^2\theta)+(1+\tan^2\theta)+2+2$$

$$=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta\ .$$

مثال 7.7

ثابت کیجئے کہ تماثل $(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

حل : یہاں پر

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta$$

$$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$(a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b))$$

$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

مثال 7.8

ثابت کیجئے کہ تماثل $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta.$

حل : یہاں پر

$$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\right) \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= (\tan\theta)\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan\theta.$$

مثال 7.9

ثابت کرو کہ تماثل $\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$

حل : ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right)\times\left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1} \qquad (\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$

$$= (1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta \qquad (\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$$

$$= 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$$

مثال 7.10

ثابت کرو کہ $\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$.

حل : پہلے ہم اس طرح فرض کریں

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}} = \frac{(\cos\theta+1)}{\cos\theta}(\cos\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$

$$= (1+\cos\theta)\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}.$$

مثال 7.11

ثابت کرو کہ متماثل $(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$

حل : یہاں پر

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta\,\sin^2\theta}{\sin\theta\,\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta \quad (1)$$

اس کے بعد اس طرح فرض کریں

$$\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\,\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

غور کریں

$$\sin\theta\cos\theta$$
$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{1}$$
$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$
$$= \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

(1) اور (2) سے ہمیں یہ حاصل ہوا کہ

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}.$$

مثال 7.12

اگر $\tan\theta + \sin\theta = m$ اور $\tan\theta - \sin\theta = n$; $m \neq n$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

حل : دیا گیا ہے کہ

$$m = \tan\theta + \sin\theta \quad \text{اور} \quad n = \tan\theta - \sin\theta.$$

یہاں پر

$$m^2 - n^2 = (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$$

$$= \tan^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\tan\theta - (\tan^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\tan\theta)$$

$$= 4\sin\theta\tan\theta \qquad (1)$$

اسی طرح

$$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)} =$$

$$4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)} = 4\sqrt{\sin^2\theta\tan^2\theta} \quad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta)$$

$$= 4\sin\theta\tan\theta. \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں یہ حاصل ہوا کہ

$$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}.$$

مثال : 7.13

اگر $\tan^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$

حل : دیا گیا ہے کہ

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

کامپونڈ واور ڈِوائڈنڈو اصول

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

کامپونڈ واور ڈِوائڈنڈو اصول استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)}{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\beta + \sin^2\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{2\cos^2\beta}{-2\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\Longrightarrow \tan^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$ جو ثبوت کو مکمل کرتا ہے۔

نوٹ : اس حساب کو کامپونڈ واور ڈِوائڈنڈو اصول استعمال کئے بغیر بھی حل کر سکتے ہیں۔

مشق 7.1

1) ثابت کیجئے کہ درج ذیل مساوات تماثلات ہیں یا نہیں ؟

(i) $\cos^2\theta + \sec^2\theta = 2+\sin\theta$ (ii) $\cot^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

2) تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$ (ii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (iv) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

(v) $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ (vi) $\dfrac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = \cot\theta$

(vii) $\sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta) = 1$ (viii) $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} = 1-\cos\theta$

3) نیچے دیے گئے تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\cos(90^\circ-\theta)} = 2\sec\theta$

(ii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

(iii) $\dfrac{\sin(90^0-\theta)}{1-\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^0-\theta)}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

(iv) $\dfrac{\tan(90^0-\theta)}{\operatorname{cosec}\theta+1} + \dfrac{\operatorname{cosec}\theta+1}{\cot\theta} = 2\sec\theta.$

(v) $\dfrac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-1}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$

(vi) $(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta) = 2$

(vii) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

(viii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\sin\theta\sin(90^0-\theta)}{2\sin^2(90^0-\theta)-1}$

(ix) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}.$

(x) $\dfrac{\cot^2\theta+\sec^2\theta}{\tan^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta} = (\sin\theta\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta).$

4. اگر $x = a\sec\theta + b\tan\theta$ اور $y = a\tan\theta + b\sec\theta$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$

5. اگر $\tan\theta = n\tan\alpha$ اور $\sin\theta = m\sin\alpha$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\cos^2\theta = \dfrac{m^2-1}{n^2-1}$

6. اگر $\cos\theta, \sin\theta$ اور $\tan\theta$ ایک G.P ہیں تو ثابت کیجئے کہ $\cot^6\theta - \cot^2\theta = 1$

7.3 بلندیاں اور فاصلے : (Heights and Distances)

Fig. 7.2

یہ بہت ہی تعجب والی بات ہوگی کہ سیاروں کا درمیانی فاصلہ، ایورسٹ کی پہاڑی کی بلندی، دوری پر موجود دو اجسام کا درمیانی فاصلہ جیسے سورج اور زمین کے درمیانی فاصلہ کی پیائش محسوب کی جاتی ہے، کیا ان کی پیائش کے لئے پیائشی فیتہ استعمال کیا جاتا ہے؟

بیشک! یہ سب ناممکن ہے۔ مگر دلچسپ بات یہ ہے کہ علمِ مثلث کے نسبتوں کی مدد سے ان فاصلوں کی پیائش کی جاسکتی ہے۔ علمِ مثلث کی نسبتوں کو استعمال کرتے ہوئے کسی جزیرے کا محل وقوع کہ کس طول البلد اور عرض البلد میں واقع ہے، اس کی نشان دہی کر سکتے ہیں۔

زاویہ پیما دوربین (theodolite) (خاکہ 7.2) ایک آلہ ہے جو طویل فاصلہ میں موجود اجسام اور مشاہدہ کرنے والے کی آنکھ کے درمیان کے زاویہ کی پیائش کرتا ہے۔ زاویہ پیما دوربین (theodolite) آلہ میں دو درجہ دار پہیے ہوتے ہیں جو ایک دوسرے کے عمود میں ہیں۔ اس میں ایک دوربین بھی ہے جس کی مدد سے متوازی اور عمودی زاویوں کی پیائش کی جاسکتی ہے۔ یہ دو چاک اُفقی اور عمودی زاویوں کی پیائش کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ فاصلہ ناپے جانے والے مقام پر دوربین کو مرکوز کر کے اس میں موجود ایک دوربینی اسکیل کی مدد سے اس جسم کی پیائش کی جاسکتی ہے۔

مثال کے طور پر ہمارے اسکول کے جھنڈے کے مستول کی بلندی کو اس کی پیائش کئے بغیر معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں کہ ایک طالب علم میدان میں ایک نقطہ A پر کھڑا ہوا ہے جو مستول سے 10 میٹر کی دوری پر ہے۔ یہ طالب علم مستول کے سرے کو دیکھتے وقت 60° زاویہ حاصل کرتا ہے۔ فرض کریں کہ زمین سے اس کی آنکھ کا فاصلہ 1.2 میٹر ہے۔ (خاکہ 7.3 کو دیکھیں)

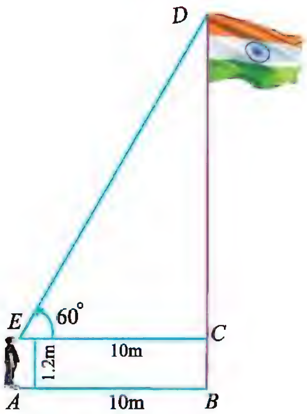


Fig. 7.3

مثلثِ قائمۃ الزاویہ DEC میں

$\Delta DEC,\ \angle DEC = 60^\circ$.

یہاں پر

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{EC}$$

لہٰذا

$$\implies \quad CD = EC \tan 60^\circ$$

$$CD = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732$$

$$= 17.32 \text{ m}$$

چنانچہ جھنڈے کے مستول کی بلندی $BD = BC + CD$

$$= 1.2 + 17.32 = 18.52 \text{ m}$$

اس طرح ہم علمِ مثلث کی نسبتوں کی مدد سے پیائش کئے بغیر ہی ہمارے اسکول کے جھنڈے کے مستول کی بلندی معلوم کر سکتے ہیں۔

چنانچہ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ میں ایک ضلع اور ایک زاویہ معلوم ہو تو مثلث کی نسبتوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم مثلث کے دیگر اضلاع معلوم کر سکتے ہیں۔ بلندی اور فاصلہ کی پیائش کے طور پیش آنے والے بعض اصطلاحات کی تعریف ہم کریں گے۔

خطِ بصارت (Line of Sight)

اگر ہم کسی شئے کا مشاہدہ کرتے ہیں تو خط بصارت ہماری آنکھ سے ایک اُفقی خطِ مستقیم ہوگی۔ یہاں پر ہم شئے کو کسی نقطہ پر فرض کرتے ہیں کیونکہ فاصلہ بہت زیادہ ہوتا ہے۔

زاویہ نشیب اور زاویہ فراز (Angle of depression and angle of elevation)

اگر شئے افقی خط سے نیچے ہو تو ہمیں اپنے سر کو جُھکا کر شئے کو دیکھنا پڑتا ہے۔ اس عمل میں ہماری آنکھیں نیچے کی طرف ایک زاویہ بناتے ہوئے حرکت کرتی ہے۔ اس زاویہ کو **زاویہ نشیب** (angle of depression) کہتے ہیں۔ یعنی جب شئے خط بصارت سے نیچے ہو، اس سے بننے والا زاویہ زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔ (خاکہ 7.4 ملاحظہ کیجئے)۔

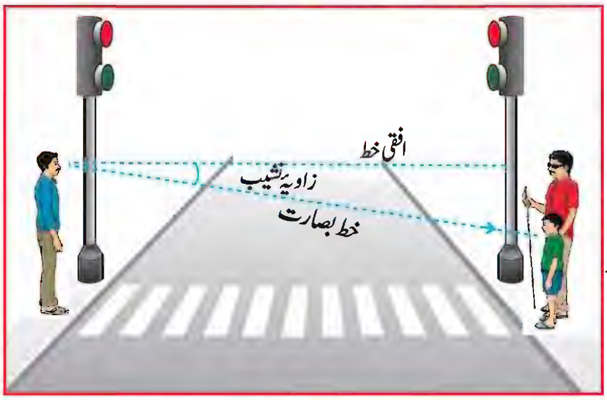


Fig. 7.4

اگر شئے افقی سطح سے اوپر ہو تو ہمیں اپنا سر اُٹھا کر شئے کو دیکھنا پڑتا ہے۔ اس عمل میں ہماری آنکھیں ایک زاویہ (اوپر) کی طرف حرکت کرتی ہیں۔ اس زاویۂ کو **زاویہ فراز** (angle of elevation) کہتے ہیں۔ یعنی جب شئے خط بصارت سے اوپر ہو، اس کو دیکھنے پر بننے والا زاویہ، زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔ (خاکہ 7.5 ملاحظہ کیجئے)۔

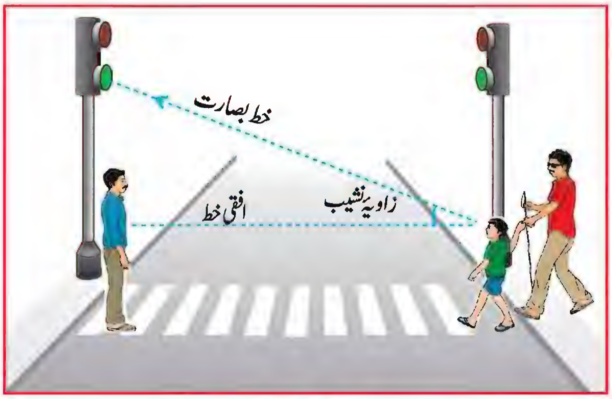


Fig. 7.5

غور کریں

(i) اگر مشاہدہ کرنے والے کی بلندی نہیں دی گئی ہو تو اُسے ایک نقطہ فرض کر لیا جاتا ہے۔

(ii) مشاہدہ کرنے والے سے شئے کا زاویہ فراز، اُس شئے سے مشاہدہ کرنے والے کے زاویہ نشیب کے مساوی ہوتا ہے۔

بلندی اور فاصلوں کے سوالوں کو حل کرنے کے لئے درج ذیل اصول کارآمد ثابت ہوں گے۔

بلندی اور فاصلے سے متعلق حسابات کو حل کرنے میں درج ذیل طریقے اپنانا بہتر ثابت ہوگا۔

(i) دیئے گئے سوالات کا بہ غور مطالبہ کریں اور اس کے مطابق خام خاکہ کھینچئے۔

(ii) نقشے کی نشاندہی کیجئے اور ناپ لکھئے۔

(iii) نہ معلوم مقداروں کو نشاندہی اس طرح کریں اگر بلندی کو ناپنا ہو تو h سے ظاہر کریں اور فاصلے کو ناپنا ہو تو x سے ظاہر کریں۔

(iv) علمِ مثلث کی نسبتیں کو پہچانئے، جو مسائل کو حل کرنے میں مددگار رہیں۔

(v) دیئے گئے ناپوں کو درج کریں اور نامعلوم ناپ کو حل کریں۔

مندرجۂ ذیل کاروائی یہ سیکھنے میں مددگار رہے کہ شئے کی بلندی کو کس طرح سے ناپ سکتے ہیں؟ ورنہ مشکلات پیش آئیں گی۔

کارروائی

- شربت پینے کا ایک اسٹرا لیں۔ اس کے درمیانی حصّے میں ایک دھاگہ باندھیں۔ دھاگہ کے دوسری جانب ایک پیپر کلپ باندھیں۔

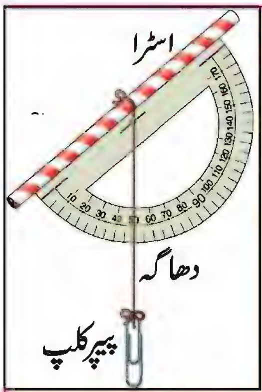


Fig. 7.6

- چاندے کے قاعدے سے اسٹرا کو اس طرح چپکائیں کہ اس کا درمیانی حصّہ چاندے کے مرکز سے انطباق کرے۔ اس بات کو دھیان میں رکھیں کہ دھاگہ آزادانہ طور پر لٹک کر ایک عمودی خط یا شاقولی خط (Plumb line) بنائے۔
- باہر کسی ایسی شئے کو تلاش کریں جو راست طور پر ناپنے پر بہت اونچی ہو، جیسے باسکٹ بال کا کڑا، جھنڈے کا مستول یا مدرسے کی عمارت۔
- اسٹرا کے ذریعے شئے کی اونچائی کو دیکھیں۔ دھاگہ اور چاندے کے زاویہ ملنے کے مقام پر بنے زاویہ کو معلوم کریں۔ $90°$ درجے سے کم کی پیائش کیا ہوا زاویہ، زاویہ فراز تصوّر کرلیں۔ اسے θ قرار دیں۔
- تمہاری آنکھ کی سطح سے لے کر میدان تک کا فاصلہ ناپیں اور تمہارے قدموں سے لے کر شئے کی سطح تک کا فاصلہ ناپیں۔ اس ناپ کو y فرض کریں
- تمہاری پیائشوں کا خاکہ بنائیں۔
- شئے کی بلندی (h) معلوم کرنے کے لئے مندرجۂ ذیل مساوات کا استعمال کریں۔ یہاں 'x' تمہاری آنکھ کی سطح سے میدان کی سطح تک کے فاصلہ کو ظاہر کرتا ہے۔ $h = x + y \tan \theta$

مثال 7.14 ایک پتنگ اُڑ رہا ہے جس کے دھاگے کی لمبائی 200 میٹر ہے۔ اگر دھاگہ زمین کے سطح سے زاویہ $30°$ بناتا ہے تو زمین سے پتنگ کتنی بلندی پر ہے معلوم کیجئے۔ (یہاں پر فرض کریں کہ دھاگہ خطِ مستقیم میں ہے)۔

حل : فرض کرو کہ h پتنگ کی بلندی کو ظاہر کرتا ہے۔
نقشے میں AC پتنگ کی ڈوری کو ظاہر کرتا ہے۔

دیا گیا ہے۔ $\angle CAB = 30°$ اور $AC = 200$ میٹر

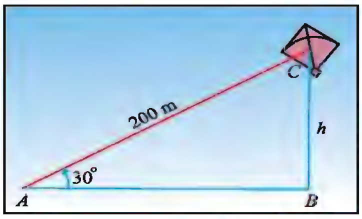


Fig. 7.7

ΔABC میں

$$\sin 30° = \frac{h}{200}$$

$$\Longrightarrow \quad h = 200 \sin 30°$$

$$\therefore \quad h = 200 \times \frac{1}{2} = 100 \text{ m}$$

لہٰذا زمین سے پتنگ کی بلندی 100 میٹر ہے۔

مثال 7.15

ایک سیڑھی دیوار پر جھکائی گئی ہے جو زمین سے $60°$ زاویہ بناتی ہے۔ سیڑھی دیوار سے 3.5 میٹر دوری پر ہے۔ سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو AC سیڑھی کو اور B زمین کی سطح کو ظاہر کرتا ہے۔
فرض کرو سیڑھی کی بلندی $AC = x$ میٹر ہے۔
$\angle CAB = 60^\circ$ اور $AB = 3.5$ میٹر
ΔCAB میں

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad x = 2 \times 3.5 = 7 \text{ m}$$

لہٰذا سیڑھی کی اونچائی 7 میٹر ہے۔

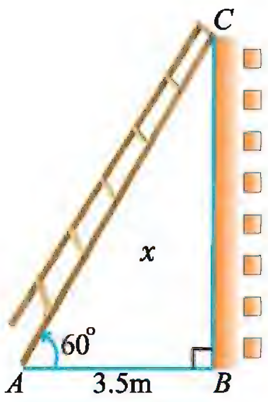


Fig 7.8

مثال 7.16

سورج کا زاویہ فراز معلوم کیجئے (زمین کی سطح سے زاویہ فراز) جب کسی مستول کے سایہ کی لمبائی 30 میٹر اور مستول کی بلندی $10\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

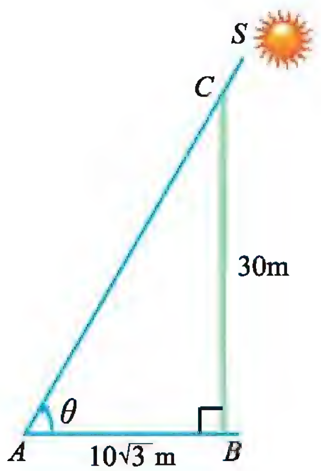


Fig. 7.9

حل : فرض کرو کہ S سورج کا مقام اور BC مستول کی بلندی ہے۔
AB مستول کا سایہ ہے اور سورج کا زاویہ فراز θ ہے۔
$BC = 30$ میٹر ؛ $AB = 10\sqrt{3}$ میٹر

$$AB = 10\sqrt{3} \text{ m and}$$

$$BC = 30 \text{ m}$$

ΔCAB میں

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ$$

زمین کی سطح سے سورج کا زاویہ فراز 60° ہے۔

مثال 7.17

ایک مشاہدہ کرنے والا مینار کی بلندی کا زاویہ فراز 30° پاتا ہے۔ مشاہدہ کرنے والا مینار سے $30\sqrt{3}$ میٹر کے فاصلے پر ہے اور اس کی آنکھ کی سطح زمین سے 1.5 میٹر پر ہے۔ تو بتایئے مینار کی بلندی کیا ہوگی؟

حل : فرض کرو کہ BD مینار کی بلندی ہے اور AE زمین کی سطح سے مشاہدہ کرنے والے کے آنکھ کی سطح ہے۔
EC اس طرح بنایئے کہ $AB = EC$ ہو۔
دیا گیا ہے $AB = EC = 30\sqrt{3}$ اور $AE = BC = 1.5\text{m}$

مثلث قائمۃ الزاویہ DEC میں

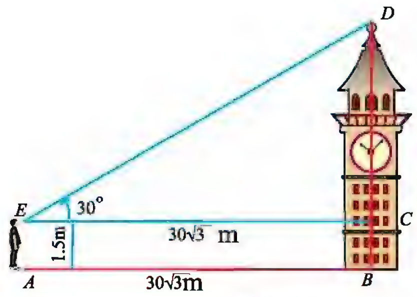
$$\tan 30° = \frac{CD}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 30° = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad CD = 30 \text{ m}$$

$$BD = BC + CD$$

لہٰذا مینار کی بلندی $= 1.5 + 30 = 31.5$ m.



7.10

مثال 7.18 ایک اونچا درخت تیز ہوا کی وجہ سے گر جاتا ہے۔ درخت کا اوپری حصہ زمین کو چھوتا ہے اور زاویہ 30° بناتا ہے۔ اگر درخت کا اوپری حصہ زمین سے 30 میٹر کی دوری پر ہو تو بتائیے کہ درخت کی بلندی کیا ہوگی؟

حل : فرض کرو کہ C درخت کے ٹوٹنے کا مقام ہے اور نقطہ A سطح زمین پر چھونے والے درخت کا اوپری حصہ ہے۔ اور B نقطہ درخت کا نچلا حصہ ہے۔

$\angle CAB = 30°$ اور $AB = 30$ میٹر

مثلث قائمۃ الزاویہ CAB میں

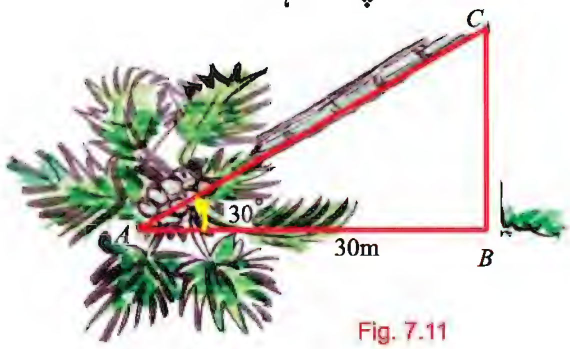


Fig. 7.11

$$\tan 30° = \frac{BC}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 30°$$

$$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3}\text{ m} \qquad (1)$$

یہاں پر $\cos 30° = \dfrac{AB}{AC}$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 30°}$$

لہٰذا $AC = \dfrac{30 \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3}$ m. $\quad (2)$

درخت کی بلندی $= BC + AC = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

$$= 30\sqrt{3}\text{m} .$$

مثال 7.19

ایک جیٹ جنگی ہوائی جہاز، زمین سے 3000 میٹر کی بلندی پر اُڑ رہا ہے۔ اُسی لمحے ایک اور جیٹ جنگی ہوائی جہاز اُڑان بھرتا ہے۔۔ اُن کا زاویہ فراز مساایک ہی مشاہدہ کے نقطے سے بالترتیب 60° اور 45° زاویہ بناتا ہے۔ اُس وقت پر پہلے جہاز سے دوسرے جہاز کا درمیانی فاصلہ کتنا ہوگا ؟ $(\sqrt{3} = 1.732)$

حل : فرض کرو O مشاہدہ کا نقطہ ہے۔

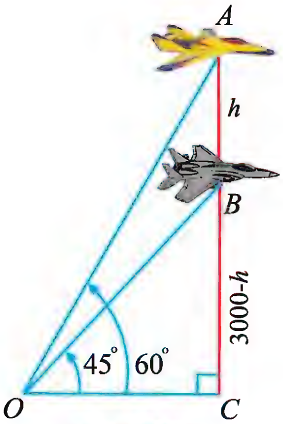


Fig. 7.12

A اور B دوجنگی جہاز ہیں اور C جوکسی وقت پر ٹھیک ایک دوسرے کے اوپر ہیں۔

فرض کریں کہ C زمین میں ایک مقام ہے اس طرح سے کہ AC = 3000 m

$\angle AOC = 60°$ اور $\angle BOC = 45°$

فرض کریں کہ اُس وقت پر دونوں جہازوں کا درمیانی فاصلہ h ہے۔

قائمۃ الزاویہ ΔBOC میں $\tan 45° = \dfrac{BC}{OC}$

$$\implies OC = BC \qquad (\because \tan 45° = 1)$$

لہٰذا $OC = 3000 - h$ (1)

قائمۃ الزاویہ ΔAOC میں $\tan 60° = \dfrac{AC}{OC}$

$$\implies OC = \frac{AC}{\tan 60°} = \frac{3000}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $3000 - h = 1000\sqrt{3}$

$$\implies h = 3000 - 1000 \times 1.732 = 1268\,\text{m}$$

دونوں جہازوں کا درمیانی فاصلہ 1268 میٹر ہے۔

مثال 7.20

ایک پہاڑ سے سطح زمین میں موجود ایک مینار کے قدم کا زاویہ فراز 60° ہے۔ اور پہاڑ کے قدم سے مینار کے اوپری حصے کا زاویہ فراز 30° ہے۔ اگر مینار کی اونچائی 50 میٹر ہے۔ تو پہاڑ کی بلندی معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کرو مینار کی اونچائی AD اور پہاڑ کی بلندی BC ہے۔ تو $\angle ABD = 30$, $\angle CAB = 60°$ اور $AD = 50$ میٹر ہے

فرض کریں کہ BC = h میٹر ہے۔

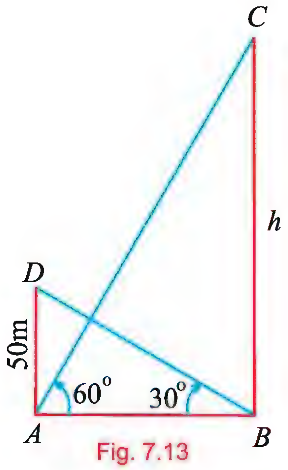


Fig. 7.13

قائمۃ الزاویہ ΔDAB میں

$$\tan 30° = \frac{AD}{AB}$$

$$\implies AB = \frac{AD}{\tan 30°}$$

$$\therefore AB = 50\sqrt{3}\text{m} \qquad (1)$$

قائمۃ الزاویہ ΔCAB میں $\tan 60° = \dfrac{BC}{AB}$

مساوات (1) استعمال کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\implies BC = AB \tan 60°$$

$$h = BC = (50\sqrt{3})\sqrt{3} = 150\,\text{m}$$

لہٰذا پہاڑ کی اونچائی 150 میٹر ہے۔

مثال 7.21

ایک عمودی دیوار اور ایک مینار سطح زمین پر ہیں۔ مینار کے اوپری حصہ سے دیوار کی اوپری سطح اور دیوار کے نچلے حصہ کا زاویہ نشیب بالترتیب $45°$ اور $60°$ ہے۔ اگر مینار کی بلندی 90 میٹر ہو تو دیوار کی بلندی معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$)

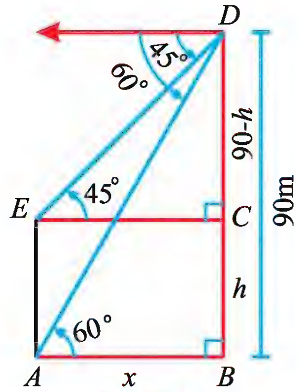


Fig. 7.14

حل : فرض کرو AE دیوار کو ظاہر کرتا ہے اور BD مینار کو۔

EC کو AB سے متوازی اس طرح بنائیں کہ $AB = EC$ ، لہٰذا $AE = BC$

فرض کریں کہ $AB = x$ میٹر ہے اور $AE = h$ میٹر ہے۔

دیا گیا ہے کہ $\angle DAB = 60°$ ، $\angle DEC = 45°$ اور $BD = 90$ میٹر

اب $AE = BC = h$ میٹر

$$CD = BD - BC = 90 - h.$$

قائمۃ الزاویہ $\Delta\, DAB$ میں $\tan 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{90}{x}$

$$\implies \quad x = \frac{90}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \qquad (1)$$

قائمۃ الزاویہ $\Delta\, DEC$ میں $\tan 45° = \frac{DC}{EC} = \frac{90-h}{x}$

لہٰذا $x = 90 - h \qquad (2)$

(1) اور (2) سے ہمیں اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ $90 - h = 30\sqrt{3}$

لہٰذا دیوار کی بلندی $h = 90 - 30\sqrt{3} = 38.04$ m.

مثال 7.22

ایک لڑکی ساحل سمندر کے قریب ایک چبوترے پر بنے ایک روشنی کے مینار پر (light house) میں کھڑی ہوئی ہے۔ وہ روشنی کے مینار سے مشرقی جانب دو کشتیوں کو دیکھتی ہے جن کے زاویہ نشیب بالترتیب $30°$ اور $60°$ ہیں۔ دو کشتیوں کا درمیانی فاصلہ 300 میٹر ہے۔ سمندر کے سطح سے روشنی کے مینار کی بلندی معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو A اور D روشنی کے مینار کے سطح زمین کو ظاہر کرتا ہے۔ اور B, C کشتی کو ظاہر کرتا ہے۔ اور روشنی کے مینار سے سطح سمندر کا فاصلہ (بلندی) h میٹر ہے۔

فرض کریں کہ $AB = x$ میٹر ہے۔

دیا گیا ہے $\angle ACD = 30°$ اور $\angle ABD = 60°$

مثلث قائمۃ الزاویہ ABD میں

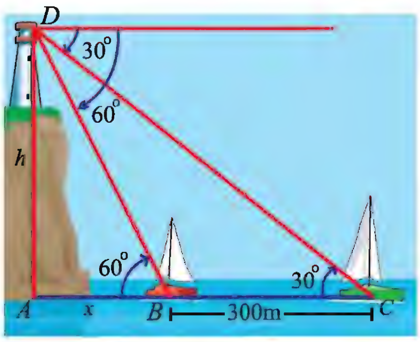


Fig. 7.15

$$\tan 60° = \frac{AD}{AB}$$

$$\implies \quad AB = \frac{AD}{\tan 60°}$$

لہٰذا $x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad (1)$

مثلث قائمۃ الزاویہ ACD میں ہمارے پاس ہے

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\implies \quad AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} \implies x + 300 = \frac{h}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

لہٰذا $x + 300 = h\sqrt{3}$ (2)

$\frac{h}{\sqrt{3}} + 300 = h\sqrt{3}$ (1) اور (2) استعمال کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\implies \quad h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 300$$

$$\therefore \quad 2h = 300\sqrt{3}. \qquad \text{لہٰذا } h = 150\sqrt{3}.$$

لہٰذا سمندر کی سطح سے روشنی کے مینار کی بلندی $150\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

مثال 7.23

ایک لڑکا ایک غبارے کو زمین کی سطح سے 88.2 میٹر کی اونچائی پر دیکھتا ہے۔ زمین سے اس کی آنکھ کا فاصلہ 1.2 میٹر ہے۔ غبارے کا زاویۂ فراز اس کی آنکھ سے 60° ہے۔ تھوڑے وقفے کے بعد اسی نقطۂ مشاہدہ پر غبارے کا زاویۂ فراز کم ہو کر 30° ہو جاتا ہے۔ اس وقفہ کے دوران غبارے کا طے کردہ فاصلہ معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے A نقطۂ مشاہدہ ہے۔ E اور D غبارے کا مقام ہے جب اس کے زاویۂ فراز 60° اور 30° ہیں۔

B اور C متوازی خط کے نقاط ہیں اس طرح سے کہ BE = CD

فرض کرو A', B' اور C' میدان پر نقاط ہیں اس طرح سے کہ A'A = B'B = C'C = 1.2 m

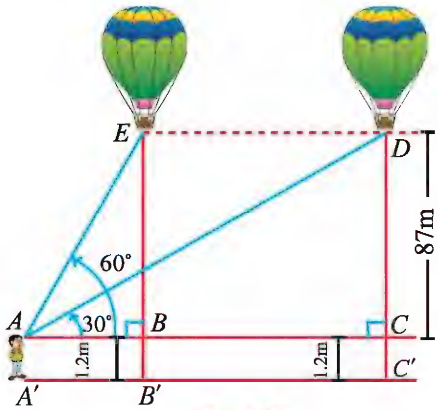


Fig. 7.16

دیا گیا ہے $\angle EAB = 60^\circ$, $\angle DAC = 30^\circ$

C'D = 88.2m اور BB' = CC' = 1.2m

اور BE = CD = 87m

اسی طرح Δ EAB میں ہمارے پاس ہے

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$\text{لہٰذا} \quad AB = \frac{87}{\tan 60^\circ} = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3}$$

$\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$ پھر مثلثِ قائمۃ الزاویہ میں Δ DAC میں ہمارے پاس ہے

$$\text{لہٰذا} \quad AC = \frac{87}{\tan 30^\circ} = 87\sqrt{3}.$$

غبارے کا طے کردہ فاصلہ ہے۔

$$ED = BC = AC - AB$$

$$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3}\ \text{m}.$$

مثال 7.24

ایک عمارت کی چھت پر ایک جھنڈے کا مستول لگا ہوا ہے۔ میدان سے جھنڈے کے مستول کے اوپری حصے اور مستول کے قدم کا زاویہ فراز 60° اور 45° ہے۔ اگر جھنڈے کے مستول کی بلندی 10 میٹر ہے تو عمارت کی بلندی معلوم کیجیے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$)

حل :

فرض کیجیے A نقطۂ مشاہدہ ہے اور B عمارت کا قدم ہے۔ BC عمارت کی بلندی ظاہر کرتا ہے اور CD جھنڈے کے مستول کی بلندی ظاہر کرتا ہے۔

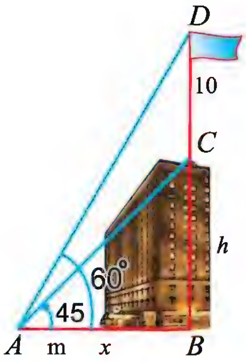


Fig. 7.17

$\angle DAB = 60^\circ$ اور $\angle CAB = 45^\circ$ دیا گیا ہے کہ اور $CD = 10\text{ m}$ ہے۔

فرض کریں کہ $BC = h$ میٹر اور $AB = x$ میٹر

قائمۃ الزاویہ ΔCAB میں

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}.$$

$$AB = BC \quad \text{i.e.,} \quad x = h \qquad (1)$$

قائمۃ الزاویہ ΔDAB میں

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \frac{h+10}{\tan 60^\circ} \quad \Rightarrow x = \frac{h+10}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $h = \dfrac{h+10}{3}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h - h = 10$$

$$\Rightarrow \quad h = \left(\frac{10}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= 5\,(2.732) = 13.66\,\text{m}$$

لہٰذا عمارت کی بلندی 13.66 میٹر ہے۔

مثال 7.25

ایک شخص آبی جہاز کے ڈیک پر پانی کی سطح سے 14 میٹر کی بلندی پر ہے۔ وہ ایک چٹان کو دیکھتا ہے جس کا زاویہ فراز چٹان کی بلندی پر 60° ہے اور زاویہ نشیب چٹان کے قدم پر 30° ہے۔ چٹان کی بلندی معلوم کیجیے۔

حل :

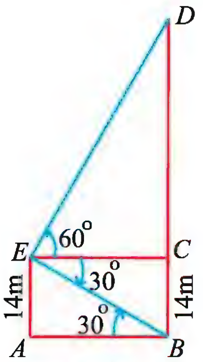


Fig. 7.18

فرض کیجیے BD چٹان کی بلندی ہے

A چٹان کا مقام ہے اور E نقطۂ مشاہدہ اس طرح ہے کہ $AE = 14\text{m}$ ہے۔

AB کے متوازی EC کو بنائیے۔ اس طرح کہ $AB = EC$

دیا گیا ہے $\angle ABE = 30^\circ$ اور $\angle DEC = 60^\circ$ ہے۔

ΔABE قائمۃ الزاویہ میں $\quad \tan 30^\circ = \dfrac{AE}{AB}$

$\therefore \quad AB = \dfrac{AE}{\tan 30^\circ} \quad \Longrightarrow AB = 14\sqrt{3}$

لہٰذا $\quad EC = 14\sqrt{3} \qquad\qquad (\because\ AB = EC)$

مثلثِ قائمۃ الزاویہ میں Δ DEC $\quad \tan 60^\circ = \dfrac{CD}{EC}$

$\therefore \ CD = EC \tan 60^\circ \Longrightarrow CD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42\,\text{m}$

لہٰذا چٹان کی بلندی $BD = BC + CD = 14 + 42 = 56\,\text{m}.$

مثال 7.26

زمین میں ایک مقام A سے ایک ہوائی جہاز کا زاویہ فراز °60 ہے۔ اُفقی اڑان کے 15 سکنڈ بعد زاویہ فراز °30 میں تبدیل ہوتا ہے۔ اگر ہوائی جہاز 200 میٹر فی سکنڈ کی رفتار سے اڑتا ہے تو ہوائی جہاز کی مستقل اونچائی معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے A نقطہ مشاہدہ ہے۔

E اور D ہوائی جہاز کا ابتدائی مقام کا اور 15 سکنڈ کے بعد کے بالترتیب مقامات ہیں۔

EB اور DC ہوائی جہاز جو اڑ رہا ہے اس کی مستقل بلندی کو ظاہر کرتا ہے

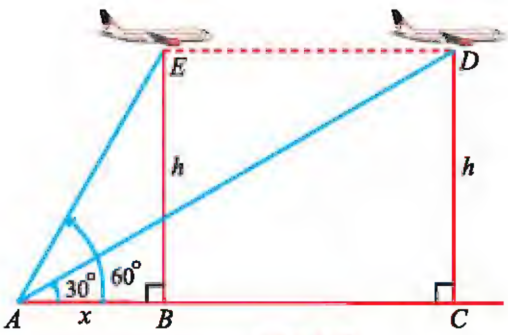


Fig. 7.19

(طے کردہ فاصلہ = رفتار × وقت)

دیا گیا ہے $\angle EAB = 60^\circ\ ,\ \angle DAC = 30^\circ$

فرض کریں کہ BE = CD = h میٹر ہے۔

فرض کریں کہ $AB = x$ میٹر ہے۔

15 سکنڈ میں طے کردہ فاصلہ

$ED = 200 \times 15 = 3000\,\text{m}$

لہٰذا $\quad BC = 3000\ \ \text{m}..$

مثلثِ قائمۃ الزاویہ Δ DAC میں

$\tan 30^\circ = \dfrac{CD}{AC}$

$\Longrightarrow \quad CD = AC \tan 30^\circ$

Thus, $\quad h = (x + 3000)\dfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad (1)$

مثلثِ قائمۃ الزاویہ Δ EAB میں $\quad \tan 60^\circ = \dfrac{BE}{AB}$

$\Longrightarrow \quad BE = AB \tan 60^\circ \Longrightarrow h = \sqrt{3}\,x \qquad (2)$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\quad \sqrt{3}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x + 3000)$

$\Longrightarrow \quad 3x = x + 3000 \qquad \Longrightarrow x = 1500\ \ \text{m}.$

لہٰذا (2) سے ہمیں معلوم ہوا کہ $\quad h = 1500\sqrt{3}\,\text{m}.$

مستقل اونچائی جس پر ہوائی جہاز اڑ رہا ہے $1500\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

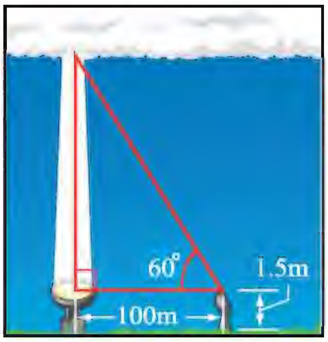
مشق 7.2

1) ایک لاری کو اتارنے کے لئے ایک سطح مائل رکھا گیا جس کا زاویہ فراز 30° ہے۔ سطح مائل زمین کی سطح سے 0.9 میٹر بلند ہو تو سطح مائل کی لمبائی معلوم کیجئے۔

2) ایک لڑکی جس کی اونچائی 150 سمر ہے برقی کھمبے کے سامنے کھڑی ہوئی ہے اور زمین پر اس کا سایہ پڑ رہا ہے جس کی لمبائی $150\sqrt{3}$ سمر ہے۔ برقی کھمبے کے اوپری حصہ کا زاویہ فراز معلوم کیجئے۔

3) دو کیڑے A اور B ایک دوسرے کی آواز کو 2 میٹر کی حد تک سن سکتے ہیں۔ کیڑا A میدان میں دیوار سے ایک میٹر کی دوری پر ہے اور اس کے دوست B کو دیوار پر دیکھ رہا ہے جس کو ایک مکڑی کھانا چاہتی ہے۔ اگر B, A کو آگاہ کرنا چاہتا ہے اور اگر B کا زاویہ فراز A تک 30° ہے تو مکڑی اس کو غذا بنائے گی یا نہیں؟ (فرض کریں کہ A آگاہ کرنے پر B بھاگ جائے گا)۔

4) ابر کی چھت (سطح) معلوم کرنے کے لئے ایک مشاہدہ کرنے والا ایک رات اسپاٹ لائٹ سیدھے ابر کی طرف دکھاتا ہے۔ زاویہ پیما دوربین (theodolite) اسپاٹ لائٹ سے 100 میٹر کی دوری پر زمین کی سطح سے 1.5 میٹر کی بلندی پر رکھا گیا ہے۔ اس کی مدد سے ابر کا زاویہ فراز 60° معلوم ہوا۔ ابر کی چھت (سطح) کتنی اونچائی پر ہے معلوم کیجئے؟ (خاکہ پر غور کریں۔)



(**نوٹ** : ابر کی چھت ٹھوس ابر کی نچلی تہہ ہے۔ ہوائی اڈے میں حفاظت سے ہوائی جہاز کی اڑان اور زمین میں اترنے کے لئے ابر کی چھت کی اونچائی معلوم کرنا ضروری ہے۔ رات کے وقت ابر کی چھت کی اونچائی معلوم کرنے کے لئے اسپاٹ لائٹ کو سیدھے اوپر ابر کے نچلے حصے پر مرکوز کیا جاتا ہے)

5) ایک رقاص (Pendulum) جس کی لمبائی 40 سمر ہے ایک مکمل اہتزاز کے دوران اپنے راس سے 60° زاویہ بناتا ہے۔ کرّے کے ابتدائی اور آخری مقام کا کم سے کم درمیانی فاصلہ کیا ہوگا ؟

6) دو درخت عمودی طور پر ایک دوسرے کی مخالف سمت میں ہیں۔ ہر درخت پر ایک ایک کوّا A اور B ہر ایک 15 میٹر اور 10 میٹر کی اونچائی پر بیٹھے ہوئے ہیں وہ دونوں زمین میں موجود ایک وڑے (Vadai) کو زاویہ نشیب 45° اور 60° سے دیکھتے ہیں۔ وہ دونوں وڑے کو حاصل کرنے کے لئے ایک ہی وقت میں اور ایک ہی رفتار میں اڑنا شروع کرتے ہیں تو کون اس میں کامیاب ہوگا ؟

7) ایک لیمپ کا کھمبا دائری شکل کے پارک کے مرکز میں نصب کیا گیا ہے۔ فرض کیجئے P اور Q پارک کے حد کے دو مقامات ہیں۔ P سے مشاہدہ کرنے پر کھمبے کا اوپری حصہ کا زاویہ فراز 30° ہے۔ لیمپ کے کھمبے کا قدم PQ پر 90° کا زاویہ بناتا ہے اور PQ=30m ہو تو کھمبے کی اونچائی معلوم کیجئے۔

8) ایک ہیلی کاپٹر 700 میٹر کی بلندی پر اڑ رہا ہے۔ اس میں بیٹھا ایک شخص ندی کے دو مخالف کناروں پر دو اشیاء کو دیکھتا ہے جن کے زاویہ نشیب بالترتیب 30° اور 45° ہیں۔ ندی کی چوڑائی معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$ لیں۔)

9) ایک مسطح پر کھڑا ہوا ایک شخص X ، اس سے 100 میٹر کے فاصلے پر اڑتے ہوئے ایک پرندے کو دیکھتا ہے اور زاویہ فراز 30° پاتا ہے۔ دوسرا شخص Y ایک عمارت پر کھڑا ہوا ہے جس کی بلندی 20 میٹر ہے، اُسی پرندے کو 45° زاویہ فراز پر مشاہدہ کرتا ہے ۔ اگر X اور Y پرندے کے مخالف سمت میں ہیں تو Y سے پرندہ کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

10) ایک طالب علم کلاس روم میں بیٹھے ہوئے تختۂ سیاہ پر بنائی گئی ایک تصویر کو دیکھتا ہے جو اس کی نظر کے اُفق میں 1.5 m کی اونچائی پر ہے۔اس تصویر کا زاویہ فراز $30°$ ہے۔وہ اس تصویر کو واضح نہیں دیکھ سکتا تو وہ ایک خط مستقیم پر حرکت کرتے ہوئے تختہ سیاہ کی طرف آتا ہے اور زاویہ فراز $45°$ پر تصویر کو واضح دیکھتا ہے۔ ہے طالب علم کا طے کردہ فاصلہ معلوم کیجئے۔

11) ایک لڑکا 30 میٹر بلند عمارت کے کچھ فاصلہ پر کھڑا ہوا ہے اور وہ ایک میدان میں کھڑے ہوکر 1.5 میٹر آنکھ کی سطح اونچائی سے عمارت کو دیکھتے وقت زاویہ فراز $30°$ ہے۔جیسے جیسے وہ عمارت کی طرف بڑھتا ہے،اس کا زاویہ فراز $60°$ تک بڑھتا ہے۔اس سے طے کردہ فاصلہ معلوم کیجئے۔

12) 200 قدم کی اونچائی والے لائٹ ہاؤس سے، لائٹ ہاؤس کی نگرانی کرنے والا ایک سامان لانے والی کشتی اور ریس کی کشتی کو ایک ہی خط بصارت میں دیکھتا ہے۔سامان لانے والی کشتی اور ریس کی کشتی کے زاویہ نشیب بالترتیب $45°$ اور $30°$ ہیں۔حفاظت کے لئے دونوں کشتیوں کو کم از کم 300 قدم کی دوری پر ہونا چاہئے اگر وہ دونوں کشتیاں 300 قدم کی دوری سے کم پر ہیں تو دیکھ بھال کرنے والے کو خطرے کی گھنٹی بجانا چاہئے۔ کیا نگرانی کرنے والے کو خطرے کی گھنٹی بجانی پڑے گی ؟

13) ایک لڑکا میدان میں کھڑے ہوئے ایک مستقل اونچائی پر ہوا کے ساتھ متوازی خط میں غبارہ کو حرکت کرتے ہوئے دیکھتا ہے۔لڑکے سے غبارے کا زاویہ فراز $60°$ ہے۔ 2 منٹ کے بعد اسی نقطہ مشاہدہ پر زاویہ فراز کم ہوکر $30°$ ہوجاتا ہے اگر ہوا کی رفتار $29\sqrt{3}$ میٹر فی سکنڈ ہوتو زمین کی سطح سے غبارے کی بلندی معلوم کیجئے۔

14) ایک سیدھی شاہراہ ایک مینار کے قدم تک بنائی گئی ہے۔مینار کے اوپر کھڑا ہوا ایک شخص ایک وین کو $30°$ زاویہ نشیب سے دیکھتا ہے۔ وین مینار کی طرف ایک ہی رفتار سے بڑھ رہی ہے۔ 6 منٹ کے بعد وین کا زاویہ نشیب $60°$ ہوجاتا ہے۔ وین کو مینار تک پہنچنے کے لئے اور کتنے سکنڈ درکار ہوں گے؟

15) زمین کے مصنوعی سیارے کا زاویہ فراز، زمین کے دو اسٹیشنوں سے، جو زمین کے ایک ہی طرف میں ہیں، $30°$ اور $60°$ معلوم کرتے ہیں۔زمین کے دو اسٹیشن اور سیارہ عمود میں ہیں اگر زمین کے اسٹیشنوں کا درمیانی فاصلہ 4000 کلومیٹر ہے تو سیارہ اور زمین کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$ استعمال کیجئے)

16) 60 میٹر اونچے پہاڑ کی بلندی سے ایک مینار کے اوپری حصہ اور نچلے حصے کے زاویہ نشیب بالترتیب $30°$ اور $60°$ ہیں۔مینار کی بلندی معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$ استعمال کیجئے)

17) 40 میٹر اونچے مینار کے اوپری حصہ اور نچلے حصہ (قدم) سے، ایک لائٹ ہاؤس کے اوپری حصہ کا زاویہ فراز بالترتیب $30°$ اور $60°$ پائے گئے ہیں۔لائٹ ہاؤس کی اونچائی معلوم کیجئے اور مینار کے قدم سے لائٹ ہاؤس کے اوپری حصہ کا فاصلہ بھی معلوم کیجئے۔

18) کسی جھیل کے قریب 45 میٹر بلند ایک مقام سے ایک ہیلی کاپٹر کو اُڑتے ہوئے دیکھا گیا جو زاویہ فراز $30°$ بناتا ہے۔ اسی وقت اس نقطہ سے اس کے عکس کو پانی میں دیکھنے پر زاویہ نشیب $60°$ بناتا ہے۔ جھیل کی سطح سے ہیلی کاپٹر کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

مشق 7.3

Choose the correct answer صحیح جواب منتخب کیجئے۔

(1 $(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta$

.(2 $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta =$

(A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

.(3 $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) =$

(A) $\sin^2\theta$ (B) 0 (C) 1 (D) $\tan^2\theta$

.(4 $\sin(90^\circ-\theta)\cos\theta + \cos(90^\circ-\theta)\sin\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) -1

.(5 $1-\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} =$

(A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cot\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

.(6 $\cos^4 x - \sin^4 x =$

(A) $2\sin^2 x - 1$ (B) $2\cos^2 x - 1$ (C) $1+2\sin^2 x$ (D) $1-2\cos^2 x$.

.(7 اگر $\tan\theta = \dfrac{a}{x}$ تو $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ کی قیمت

(A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$ (C) $\operatorname{cosec}\theta$ (D) $\sec\theta$

.(8 اگر $x = a\sec\theta$ ، $y = b\tan\theta$ تو $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ کی قیمت

(A) 1 (B) -1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

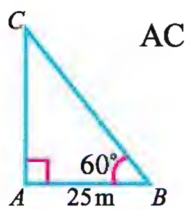
.(9 $\dfrac{\sec\theta}{\cot\theta+\tan\theta} =$

(A) $\cot\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $-\cot\theta$

.(10 $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\tan\theta}+\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)\cos\theta}{\cot\theta} =$

(A) $\tan\theta$ (B) 1 (C) -1 (D) $\sin\theta$

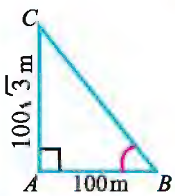
.(11 دیے گئے نقشے میں AC =



(A) 25 m (B) $25\sqrt{3}$ m

(C) $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ m (D) $25\sqrt{2}$ m

.(12 دیے گئے نقشے میں $\angle ABC =$



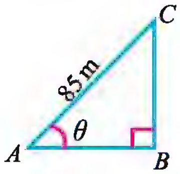
(A) 45° (B) 30°

(C) 60° (D) 50°

13. ایک شخص ایک مینار سے 28.5 m کی دوری پر ہے اس کی آنکھ کی سطح زمین سے 1.5 میٹر کے اوپر ہے۔ مینار کا زاویہ فراز اس کی آنکھ سے 45° ہے تو مینار کی اونچائی کتنی ہے۔

(A) 30 m (B) 27.5 m (C) 28.5 m (D) 27 m

14. دیے گئے نقشے میں اگر $\sin\theta = \frac{15}{17}$ تو BC =



(A) 85 m (B) 65 m

(C) 95 m (D) 75 m

15. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) =$ (15

(A) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ (D) 0

16. $(1+\cot^2\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) =$ (16

(A) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

17. $(\cos^2\theta - 1)(\cot^2\theta + 1) + 1 =$ (17

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) 0

18. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} =$ (18

(A) $\cos^2\theta$ (B) $\tan^2\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

19. $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} =$ (19

(A) $\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ (B) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

(C) $\cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta$ (D) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

20. $9\tan^2\theta - 9\sec^2\theta =$ (20

(A) 1 (B) 0 (C) 9 (D) -9

کیا تم جانتے ہو؟

پال اریڈاس (26-03-1913 سے 20-09-1996) ہنگیری ملک کے ریاضی دان تھے۔ ریاضی تاریخ میں سب سے زیادہ تحقیقی مضامین (مقالہ) انہوں نے پیش کیے۔ ان کا موازنہ لیون ہارڈ یولر کے ساتھ کیا جا سکتا ہے۔ انہوں نے اپنے دور حیات میں 1,475 ریاضی مضامین لکھے، جب کہ یولر نے 800 تحقیقی مقالے پیش کیے۔ انہوں نے سماجی کارروائیوں اور روزمرہ کی کارروائیوں نے حساب کو عملی طور پر استعمال کیا۔ ان کے دورِ حیات میں ان کے 511 معاونین (شریک محنت) پائے گئے۔

8

مساحت
(MENSURATION)

Measure what is measurable, and make measurable what is not so
- Galileo Galilie

- تعارف
- سطحی رقبہ اور حجم
  - استوانہ
  - مخروط
  - کرّہ
- مخلوط شکلیں اور غیر متغیر حجمیں

ارشمیدس
(287-212 ق.م.)
یونان
ارشمیدس کو قدیم زمانے کے عظیم ترین ریاضی دان کے طور پر یاد کیا جاتا ہے۔ انہوں نے علمِ ہندسہ میں مسطح شکلوں کے رقبے اور منحنی سطحوں کے رقبہ اور حجم کے تعلق سے اہم رول ادا کیا ہے۔

8.1 تعارف

علمِ ہندسہ کا وہ حصّہ جو خطوط کی لمبائیوں، مسطح شکلوں کے احاطہ اور رقبہ، ٹھوس اجسام کے سطحی رقبوں اور حجموں کی پیائشوں سے تعلق رکھتا ہے **مساحت** کہلاتا ہے۔ چیزوں کی پیائش کا عمل بہت ضروری ہے کیونکہ یہ زندگی کے ہر مرحلے میں پیش آتا ہے۔

ابتدائی علمِ ہندسہ میں، سطح، کثیر سطح اور منحنی سطح کے رقبوں (مثال کے طور پر کرّہ) کے بارے میں مطالعہ کیا جاتا ہے۔

"سطحی رقبہ اور حجم" کی نسبت کو نانو سائنس کی سب سے عظیم تصور تسلیم کیا جاتا ہے چونکہ وہ جسامت پر منحصر خواص کو سمجھنے کی بنیاد ہے۔ نانو سائنس (Nano science) میں پیائش اور ٹکنالوجی امتیازی خصوصیات ہیں۔

اس باب میں ہم یہ سیکھیں گے کہ کس طرح ٹھوس شکلیں جیسے استوانہ، مخروط، کرّہ اور مخلوط شکلوں کا سطحی رقبہ اور حجم معلوم کیا جاتا ہے۔

8.2 سطحی رقبہ (Surface area)

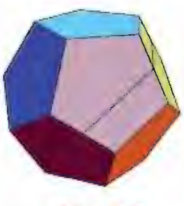


Fig. 8.1

سِسلی کے شہر سَئی راکیس (Syracuse) کا باشندہ ارشمیدس یونانی تھا۔ اس نے ثابت کیا کہ ایک کرّہ کا حجم ایک دائرہ کے اندر بنائے جانے والے استوانہ (Circumscribed cylinder) کے حجم کا دوتہائی ہوتا ہے۔ اس کو وہ اپنا سب سے زیادہ اہم کارنامہ شمار کرتے ہیں۔ اس نے جامع طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے خطِ مکافی کے اندر موجود قوس کا رقبہ محسوب کیا۔

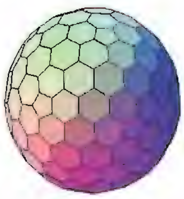


Fig. 8.2

ٹھوس شئے کا بیرونی (سطحی) ظاہر شدہ رقبہ ہی اس شئے کا سطحی رقبہ ہوگا۔ لہٰذا کسی سہ ابعادی شئے کی کل بیرونی سطح کا رقبہ ہی اس شئے کا سطحی رقبہ کہلاتا ہے۔ دی گئی متصل شکلیں بعض ٹھوس اشیاء کے رقبوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

8.2.1 قائم مدوّر استوانہ

اگر ہم کاغذ کے یا کارڈ بورڈ کے مساوی دائرہ نما ٹکڑوں کو عمودی طور پر جوڑتے جائیں تو ہمیں ایک ٹھوس شئے حاصل ہوگی، جس کو ہم **قائم مدوّر استوانہ** کہتے ہیں، کیونکہ وہ قاعدہ کے عمودی طور پر رکھے گئے ہیں۔ غور کیجئے کہ وہ قاعدہ کے عمود میں ہیں اور قاعدہ دائرہ نما ہے۔ (شکل 8.3 پر غور کیجئے)

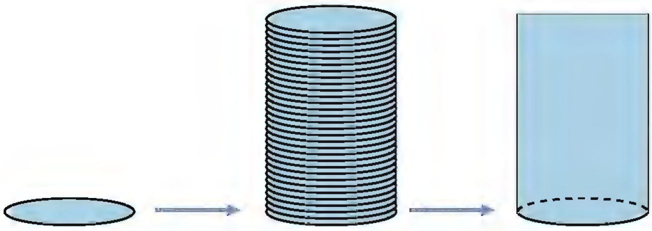


Fig. 8.3

تعریف

اگر کسی مستطیل کو ایک ضلع پر پورے طور پر ایک مرتبہ گھمایا جائے تو اس سے بننے والی ٹھوس شئے قائم مدور استوانہ کہلاتی ہے۔

کارروائی

فرض کرو ABCD ایک استوانہ ہے۔ فرض کرو وہ اس کے ایک ضلع AB پر گھومتا ہے اور پورا ایک چکر لگاتا ہے۔ اس چکّر سے ایک قائم مدوّر استوانہ وجود میں آتا ہے جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔ AB کو استوانہ کا محور کہا جاتا ہے۔ AB استوانہ کی لمبائی یا اونچائی ہے اور AD یا BC کو نصف قطر کہتے ہیں۔

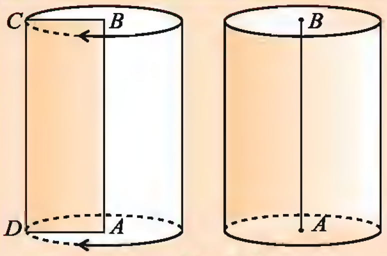


Fig. 8.4

غور کریں

(i) اگر قاعدہ دائرہ نما نہ ہو تو اس استوانہ کو **بیضوی ناقص استوانہ** (Oblique cylinder) کہتے ہیں۔

(ii) اگر قاعدہ دائرہ نما ہو مگر محور کے عمود میں نہ ہو تو اس کو صرف **مدوّر استوانہ** کہیں گے۔

(iii) اگر محور، دائرہ نما قاعدہ کے عمود میں ہو تو اس استوانہ کو **قائم مدوّر استوانہ** کہتے ہیں۔

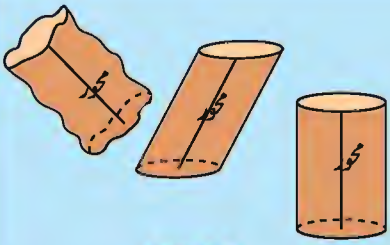


Fig. 8.5

(i) قائم مدوّر استوانہ کا منحنی سطحی رقبہ

متصلہ شکل میں قائم مدوّر استوانہ کے اوپری اور نچلی حصے مدوّر اور ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ استوانہ کا عمودی سطح منحنی ہے۔ اس کو **منحنی سطح** یا **طرفی سطح** کہتے ہیں۔

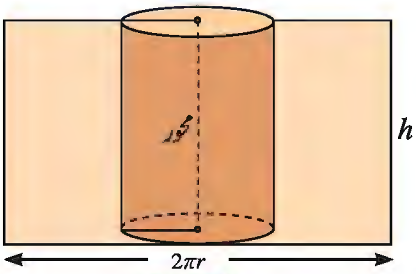


Fig. 8.6

استوانہ کا منحنی سطحی رقبہ CSA = قاعدہ کا محیط × اونچائی

$= 2\pi r \times h$

منحنی سطح کا رقبہ CSA $= 2\pi rh$ sq. units.

(ii) قائم مدوّر استوانہ کا کل سطحی رقبہ

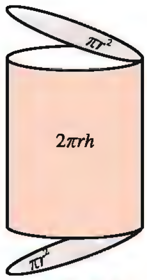


Fig. 8.7

کل سطح کا رقبہ , TSA = منحنی سطح کا رقبہ + 2 × قاعدہ کا رقبہ

$$= 2\pi rh + 2\times \pi r^2$$

$$\text{TSA} = 2\pi r(h+r) \text{ sq.units.}$$

(iii) قائم مدوّر کھوکھلا استوانہ (Hollow Cylinder)

ٹھوس اجسام جیسے لوہے کی پائپ یا ربر کی ٹیوب وغیرہ کھوکھلے استوانہ کی شکل رکھتے ہیں۔فرض کرو کھوکھلے استوانے کی اونچائی h ہے۔ بیرونی اور اندرونی نصف قطر بالترتیب R اور r ہیں تو

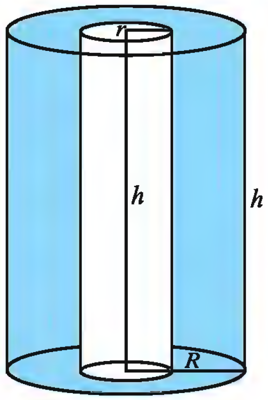


Fig. 8.8

منحنی سطح کا رقبہ CSA = بیرونی سطح کا رقبہ + اندرونی سطح کا رقبہ

$$= 2\pi Rh + 2\pi rh$$

لہٰذا , CSA $= 2\pi h(R+r)$ sq.units

کل سطحی رقبہ TSA = CSA + 2 × قاعدہ کا رقبہ

$$= 2\pi h(R+r) + 2\times[\pi R^2 - \pi r^2]$$

$$= 2\pi h(R+r) + 2\pi(R+r)(R-r)$$

$$\therefore \quad \text{TSA} = 2\pi(R+r)(R-r+h) \text{ sq.units.}$$

ریمارک : $w = R - r.$ کھوکھلے استوانہ کی موٹائی (جسامت)

> **غور کریں**
>
> اس باب میں ہم جب بھی ضرورت پڑے π کی **تقریبی قیمت** $\frac{22}{7}$ استعمال کریں گے۔

مثال 8.1

ایک ٹھوس قائم مدوّر استوانہ 7cm نصف قطر اور 20cm اونچائی رکھتا ہے۔اس کا (i) منحنی سطح کا رقبہ (ii) کل سطح کا رقبہ معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں۔)

حل : فرض کرو قائم مدوّر استوانے کے نصف قطر اور اونچائی بالترتیب r اور h ہیں

دیا گیا ہے : h = 20cm , r = 7cm

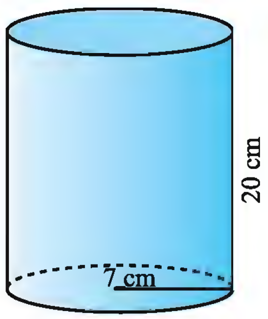


Fig. 8.9

منحنی سطح کا رقبہ , CSA $= 2\pi rh$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 20$$

(C.S.A) منحنی سطح کا رقبہ = 880 sq.cm

کل سطحی رقبہ $= 2\pi r(h+r)$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times[20+7] = 44\times 27$$

(T.S.A) کل سطحی رقبہ = 1188 sq.cm.

مثال 8.2

اگر ایک مدوّر استوانہ کا کل سطحی رقبہ 880 مربع سمر اور نصف قطر 10cm ہو تو اس کے منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کرو r اور h قائم مدوّر استوانہ کا نصف قطر اور اونچائی بالترتیب ہیں۔ فرض کرو قائم مدوّر استوانہ کا کل سطحی رقبہ S ہے۔

دیا گیا ہے کہ : $S = 880\text{ cm}^2$ اور $r = 10\text{ cm}$

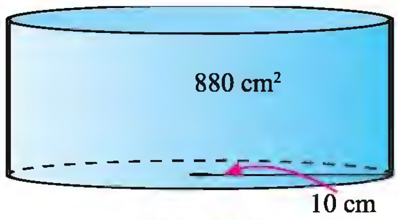


Fig. 8.10

$$\text{Now, } S = 880 \implies 2\pi r[h+r] = 880$$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times 10[h+10] = 880$$

$$\implies h + 10 = \frac{880 \times 7}{2 \times 22 \times 10}$$

$$\implies h + 10 = 14$$

لہٰذا استوانہ کی اونچائی $h = 4\text{ cm}$

چنانچہ استوانہ کے منحنی سطح کا رقبہ

$$2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 4 = \frac{1760}{7}$$

دوسرا طریقہ

$$\text{CSA} = \text{TSA} - 2\times \text{قاعدہ کا رقبہ}$$

$$= 880 - 2 \times \pi r^2$$

$$= 880 - 2 \times \frac{22}{7} \times 10^2$$

$$= \frac{1760}{7} = 251\frac{3}{7}\text{ sq.cm.}$$

استوانہ کے منحنی سطح کا رقبہ $= 251\frac{3}{7}$ sq.cm.

مثال 8.3

ایک قائم مدوّر استوانہ کے قاعدہ کے نصف قطر اور اونچائی کی نسبت 2:5 ہے۔ اگر منحنی سطح کا رقبہ $\frac{3960}{7}$ مربع سمر ہو تو اونچائی اور نصف قطر معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : دیا گیا ہے : $\frac{r}{h} = \frac{2}{5} \implies r : h = 2 : 5$ لہٰذا $r = \frac{2}{5}h$

منحنی سطح کا رقبہ (C.S.A) $= 2\pi rh$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{5} \times h \times h = \frac{3960}{7}$$

$$\implies h^2 = \frac{3960 \times 7 \times 5}{2 \times 22 \times 2 \times 7} = 225$$

$$h = 15 \implies r = \frac{2}{5}h = 6.$$

لہٰذا استوانہ کی اونچائی 15 سمر اور نصف 6 سمر ہے۔

مثال 8.4

120cm لمبے ایک روڈ رولر (Road Roller) کا قطر 84cm ہے۔ اگر ایک کھیل کے میدان ہموار کرنے کے لئے وہ 500 مکمل چکر لگاتا ہے تو اس کو ہموار کرنے کا خرچ فی مربع میٹر 75 پیسے کے حساب سے معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں۔)

حل : ہمیں دیا گیا ہے کہ $h = 120cm$, $r = 42cm$

روڈ رولر کے منحنی سطح کا رقبہ = {ایک چکر میں رولر سے ہموار کیا ہوا رقبہ}

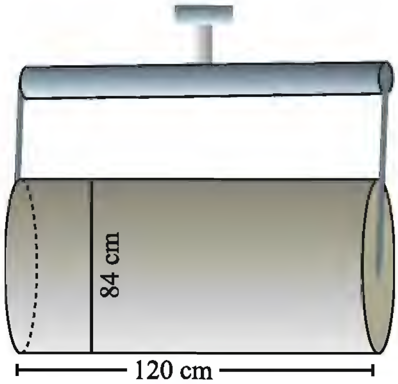


Fig. 8.11

$(10,000\ cm^2 = 1\ sq.m)$

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 120$$

$$= 31680\ cm^2.$$

500 چکروں سے ہموار کیا ہوا رقبہ $= 31680 \times 500$

$$= 15840000\ cm^2$$

$$= \frac{15840000}{10000} = 1584\ m^2$$

1 مربع میٹر پر ہموار کرنے کا خرچ $= ₹\ \frac{75}{100}$

کھیل کے میدان کو ہموار کرنے کا خرچ $= \frac{1584 \times 75}{100} = ₹\ 1188.$

مثال 8.5

ایک کھوکھلے استوانہ کا بیرونی اور اندرونی نصف قطر بالترتیب 18 سم اور 12cm ہیں۔ اگر اسکی بلندی 14cm ہو تو اس کے منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کرو ایک کھوکھلے استوانے کا اندرونی نصف قطر ، بیرونی نصف قطر اور بلندی بالترتیب r، R اور h ہیں۔

$$r = 12\,cm,\quad R = 18\,cm,\quad h = 14\,cm$$

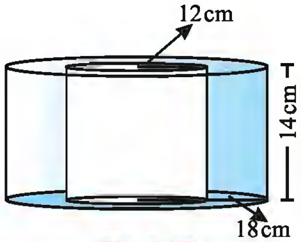


Fig. 8.12

منحنی سطح کا رقبہ , $CSA = 2\pi h(R+r)$

$$CSA = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (18+12)$$

$$= 2640\ sq.cm$$

کل سطحی رقبہ TSA $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times (18+12)(18-12+14)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times 20 = \frac{26400}{7}.$$

کل سطحی رقبہ $= 3771\frac{3}{7}$ sq.cm.

8.2.2۔ قائم مدوّر مخروط

ہماری روزمرّہ زندگی میں ہم ٹھوس اشیاء جیسے آئس کریم کا کون (cone) ، مندر کی رتھ کا اوپری حصہ، سرکس کے جوکر کی ٹوپی، مہندی کا کون وغیرہ۔ عموماً ان تمام چیزوں کی شکل قائم مدوّر مخروط کی ہے۔

مخروط ایک ٹھوس یا اشیاء ہے جو ایک چپٹے قاعدہ سے اوپر کی جانب بتدریج گھٹتے ہوئے ایک نقطہ میں ختم ہوتا ہے جو راس کہلاتا ہے۔ عام طور پر قاعدہ کسی بھی شکل کا ہوسکتا ہے۔علمِ ہندسہ میں مخروط کو ہمیشہ قائم مدوّر کے طور پر لیا جاتا ہے۔قائم کے معنی یہ ہیں کہ محور جو قاعدہ کے مرکز سے گذرتا ہے، اس کے سطح پر عمودی ہوتا ہے۔مدوّر کے معنی یہ ہوا کہ اس کا قاعدہ دائرہ نما ہے۔اس حصّہ میں ہم قائم مدوّر مخروط کی تعریف کریں گے اور اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں گے۔

کارروائی

ایک مثلث ABC کاٹو، جس میں زاویہ قائمہ B پر ہو۔ایک عمودی ضلع فرض کرو AB پر ایک موٹی ڈوری چپکاؤ۔مثلث کے دونوں جانب کی ڈور کو ہاتھ میں پکڑ کر مثلث کو کئی مرتبہ گھماؤ۔

اس سے کیا ہوتا ہے ؟رسی پر گھمانے سے جو شکل بنتی ہے، کیا آپ پہچانتے ہیں ؟ اس سے جو شکل بنتی ہے جو وہ ایک قائم مدور مخروط ہے۔

اگر ایک مثلثِ قائمۃ الزاویہ ABC ، ضلع AB ، جس پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، 360° پر گردش کی جائے تو اس سے ٹھوس شکل بنتی ہے۔اس کو قائم مدور مخروط کہتے ہیں۔

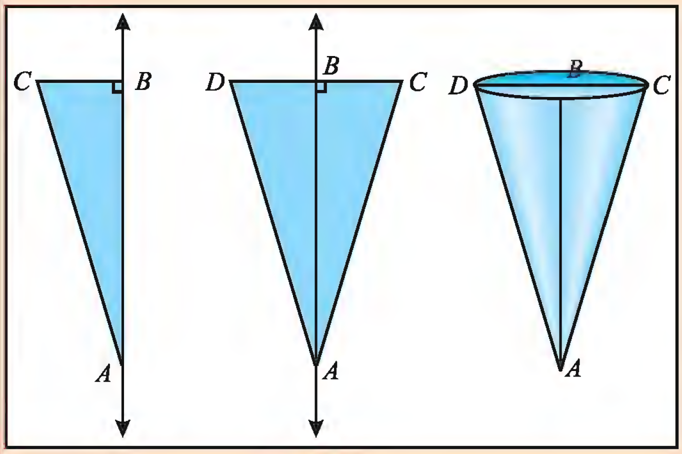


Fig. 8.13

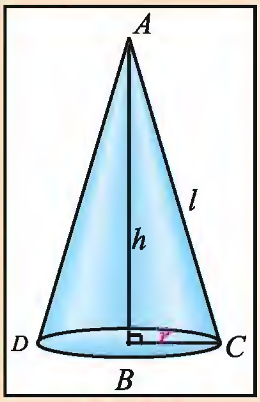


Fig. 8.14

AB کی لمبائی کو مخروط کی اونچائی کہتے ہیں۔

BC کا طول قاعدہ کا نصف قطر $(BC = r)$ ہے۔

AC کا طول مخروط کی ترچھی بلندی ہے۔ $(AC = AD = l)$

مثلثِ قائمۃ الزاویہ ABC میں

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$ (مسئلہ فیثا غورث کے تحت)

$h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$r = \sqrt{l^2 - h^2}$

غور کریں

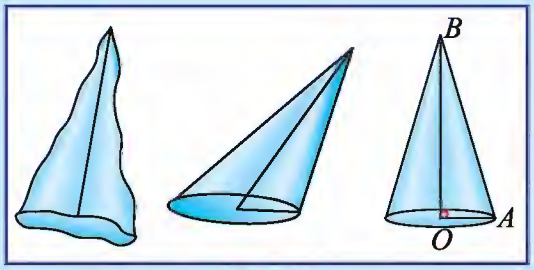


Fig. 8.15

(i) اگر مخروط کا قاعدہ دائرہ نما ہو تو اس کو بیضوی ناقص مخروط (Oblique Cone) کہتے ہیں۔

(ii) اگر مخروط کا قاعدہ دائرہ نما ہو تو اس کو مدوّر مخروط کہتے ہیں۔

(iii) اگر اس کا راس (vertex) ، مدوّر قاعدہ کے بالکل اوپر ہو تو اس کو قائم مدوّر مخروط کہتے ہیں۔

(i) کھوکھلے مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ

فرض کرو ایک قطاع دائرہ (sector) کا نصف قطر l اور مرکزی زاویہ $\theta°$ ہے۔فرض L قوس کے طول کی نشاندہی کرتا ہے

اس طرح $\dfrac{2\pi l}{L} = \dfrac{360°}{\theta°}$

$$\Longrightarrow \quad L = 2\pi l \times \frac{\theta°}{360°} \qquad (1)$$

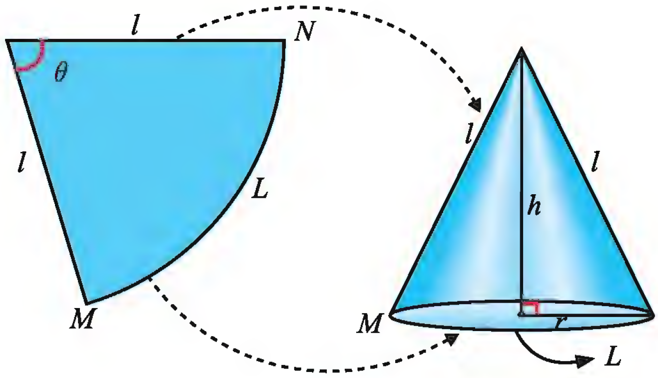


Fig. 8.16

قطاع دائرہ کے نصف قطروں کو ملانے پر

ہمیں قائم مدوّر مخروط حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو مخروط کا نصف قطر r ہے۔

لہٰذا $L = 2\pi r$

(1) سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$2\pi r = 2\pi l \times \frac{\theta°}{360°}$$

$$\Longrightarrow \quad r = l\left(\frac{\theta°}{360°}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{l} = \left(\frac{\theta°}{360°}\right)$$

فرض کرو قطاع دائرہ کا رقبہ A ہے، تو

$$\frac{\pi l^2}{A} = \frac{360°}{\theta°} \qquad (2)$$

برائے ذہن نشینی

جب ایک قطاع دائرہ کو ایک مخروط کی شکل میں موڑا جاتا ہے تو درج ذیل تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں۔

قطاع دائرہ		مخروط
نصف قطر (l)	$\rightarrow$	ترچھی اونچائی (l)
قوس کی لمبائی (L)	$\rightarrow$	قاعدے کا احاطہ $2\pi r$
رقبہ	$\rightarrow$	منحنی سطح کا رقبہ πrl

قطاع دائرہ کا رقبہ = مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ

مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ $A = \pi l^2\left(\dfrac{\theta°}{360°}\right) = \pi l^2\left(\dfrac{r}{l}\right).$

مخروط کا منحنی سطحی رقبہ = πrl sq.units.

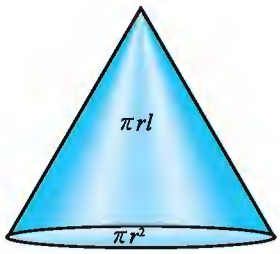


Fig. 8.17

(ii) ایک ٹھوس قائم مدور مخروط کا کل سطحی رقبہ

ٹھوس مخروط کا کل سطحی رقبہ = مخروط کا منحنی سطحی رقبہ + قاعدہ کا رقبہ

$= \pi rl + \pi r^2$

مخروط کا کل سطحی رقبہ = $\pi r(l + r)$ مربع اکائیاں

مثال 8.6

ایک قائم مدوّر مخروط کے نصف قطر اور ترچھی اونچائی بالترتیب 35cm اور 37cm ہیں۔مخروط کا منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطح کا رقبہ معلوم کرو۔ ($\pi = \dfrac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کرو مخروط کا نصف قطر، بلندی اور ترچھی بلندی بالترتیب r ، h اور l ہیں۔

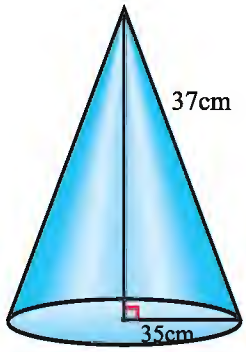


Fig. 8.18

$$r = 35 \text{ cm}, l = 37 \text{ cm}$$

منحنی سطح کا رقبہ $CSA = \pi r l = \pi(35)(37)$

$$CSA = 4070 \text{ sq.cm}$$

کل سطحی رقبہ $TSA = \pi r[l + r]$

$$= \frac{22}{7} \times 35 \times [37 + 35]$$

$$TSA = 7920 \text{ sq.cm.}$$

مثال 8.7

فرض کریں کہ O اور C ایک قائم مدور مخروط کے قاعدہ کا مرکز اور راس ہیں۔ فرض کریں کہ B مخروط کے قاعدہ کے محیط پر کوئی ایک نقطہ ہے۔ اگر مخروط کا نصف قطر 6cm اور $\angle OBC = 60°$ ہو تو اس کی ترچھی اونچائی اور منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔

حل :

نصف قطر $OB = 6\text{cm}$ اور $\angle OBC = 60°$ (دیا گیا ہے)

مثلث قائمۃ الزاویہ OBC میں

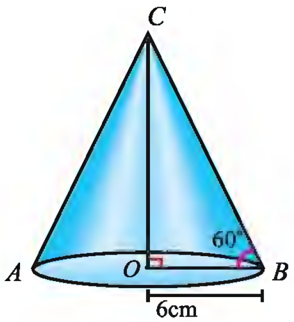


Fig. 8.19

$$\cos 60^o = \frac{OB}{BC}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = \frac{OB}{\cos 60°}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{6}{(\frac{1}{2})} = 12 \text{ cm}$$

مخروط کی ترچھی بلندی $, l = 12 \text{ cm}$

مثلثِ قائمۃ الزاویہ OBC میں

$$\tan 60^o = \frac{OC}{OB}$$

$$\Longrightarrow \quad OC = OB \tan 60° = 6\sqrt{3}$$

لہٰذا مخروط کی بلندی $OC = 6\sqrt{3}$ cm

منحنی سطح کا رقبہ $\pi r l = \pi \times 6 \times 12 = 72\pi \text{ cm}^2.$

مثال 8.8

ایک قطاع دائرہ جس کا زاویہ 120° ہے، اس کو 21 سم نصف قطر والے ایک دائرہ سے کاٹا گیا ہے۔ اسے ایک مخروط کی شکل میں موڑا جاتا ہے۔ اس کے منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کریں کہ مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر r ہے۔

قطاع دائرہ کا زاویہ $\theta = 120°$

قطاع دائرہ کا نصف قطر $R = 21\text{cm}$

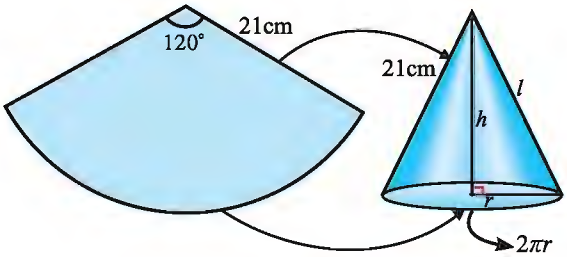


Fig. 8.20

قطاع دائرہ کو مخروط کی شکل میں موڑنے پر

قوس کا طول = مخروط کے قاعدہ کا محیط

$$\Longrightarrow \quad 2\pi r = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{\theta}{360^\circ} \times R$$

مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر $r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 21 = 7$ cm.

دائرہ کا نصف قطر = l مخروط کی ترچھی بلندی

$l = R \Longrightarrow l = 21$ cm.

منحنی سطح کا رقبہ (CSA) $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 462.$

لہٰذا مخروط کا CSA = 462 مربع سمر

متبادل طریقہ

مخروط کا CSA = قطاع دائرہ کا رقبہ

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi \times R^2$$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$= 462$ sq.cm.

8.2.3 کرّہ (Sphere)

ایک دائرہ نما تھالی (Disk) یا نصف دائرہ کو اس کے قطر پر گھمایا جائے تو اس سے حاصل ہونے والی ٹھوس شکل کو **کرّہ** کہتے ہیں۔ اسطرح کرّہ ایک سہ۔ابعادی (3- dimensional) شئے ہے جو سطحی رقبہ اور حجم رکھتا ہے۔

(i) ٹھوس کرّہ کے منحنی سطح کا رقبہ

ایک مدوّر تھالی لو۔اس کے قطر پر ایک ڈوری چسپان کرواور اس کو 360° پر گھماؤ۔اس سے بننے والی شئے ایک گیند کی طرح نظر آتی ہے یہ نئی ٹھوس شئے **کرّہ** کہلاتی ہے۔

ذیل کے عمل سے ہمیں یہ نقشہ ذہن میں آتا ہے کہ ایک ہی نصف قطر رکھنے والے دائرے کے رقبہ کا چار گُنا ،اس سے بننے والے کرّہ کا سطحی رقبہ ہوتا ہے۔

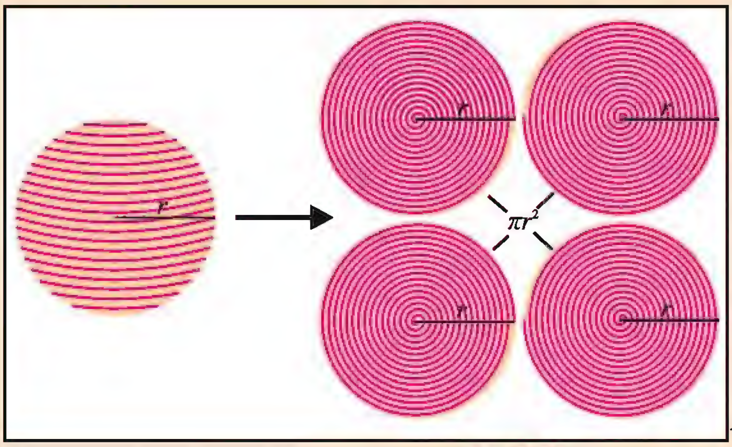


Fig. 8.21

- ایک پلاسٹک کی گیند لو۔
- گیند کے اوپر ایک الفنات ثبت کرو۔
- گیند پر یکساں طور پر دھاگا لپیٹو یہاں تک کہ پوری گیند ڈھک جائے۔
- اب دھاگہ کو کھولو اور دھاگہ کی لمبائی کو ناپو۔
- دھاگہ کو چار مساوی حصّوں میں کاٹ دو۔
- خاکہ میں بتائے مطابق دھاگوں کو لپیٹو۔
- کرہ کے نصف قطر اور دائروں کے نصف قطروں کو ناپو

چار مساوی دائروں کا نصف قطر = کرّہ کا نصف قطر

دائرہ کا رقبہ × 4 = CSA کرّہ کا منحنی سطح کا رقبہ

$= 4 \times \pi r^2$

کرّہ کا منحنی سطح کا رقبہ CSA $= 4\pi r^2$ مربع اکائیاں

(ii) ٹھوس نصف کرّہ (Solid Hemisphere)

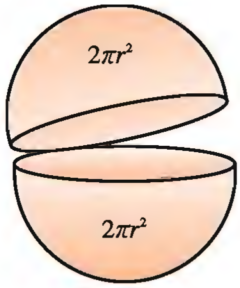


Fig. 8.22

ایک کرّہ کے مرکز سے ایک مسطح گذاری جائے تو وہ کرّہ کو دو مساوی حصّوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ہر ایک ٹھوس نصف کرّہ کہلاتا ہے۔

$$\text{نصف کرّہ کا منحنی سطح کا رقبہ} = \frac{\text{کرّہ کا منحنی سطح کا رقبہ}}{2}$$

$$= \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2 \text{ sq.units.}$$

$$\text{نصف کرّہ کا کل سطحی رقبہ TSA} = \text{منحنی سطح کا رقبہ} + \text{دائرہ کے قاعدہ کا رقبہ}$$

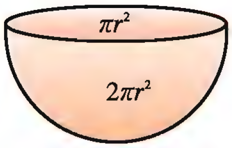


Fig. 8.23

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\pi r^2 \text{ sq.units.}$$

(iii) کھوکھلا کرّہ (Hollow sphere)

فرض کرو کھوکھلے کرّہ کے بیرونی اور اندرونی نصف قطریں R اور r ہیں۔

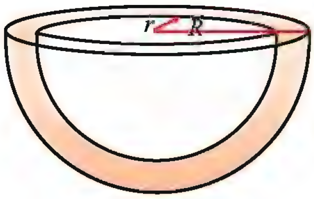


Fig. 8.24

$$\text{منحنی سطح کا رقبہ} = \text{بیرونی سطح کا رقبہ} + \text{اندرونی سطح کا رقبہ}$$

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi(R^2 + r^2) \text{ مربع اکائیاں}$$

$$\text{کل سطحی رقبہ} = \text{بیرونی سطح کا رقبہ} + \text{اندرونی سطح کا رقبہ} + \text{قاعدہ کا رقبہ}$$

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$$

$$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)(R - r) \text{ sq.units.}$$

$$= \pi(3R^2 + r^2) \text{ sq.units}$$

مثال 8.9

ایک کھوکھلے کرّہ کے اندر ایک موٹر سائیکل سوار اپنا کرتب دکھلاتا ہے جس کا اندرونی قطر 7m ہے۔ معلوم کرو کہ موٹر سائیکل سوار کو سواری کرنے کے لئے کتنا رقبہ دستیاب ہے؟ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل :

کھوکھلے کرّہ کا اندرونی قطر $2r = 7\text{m}$

$$\text{موٹر سائیکل سوار کو دستیاب رقبہ} = \text{کرّہ کا اندرونی سطحی رقبہ}$$

$$= 4\pi r^2 = \pi(2r)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 7^2$$

$$\text{موٹر سائیکل سوار کو سواری کرنے کے لئے دستیاب رقبہ} = 154 \text{ sq.m.}$$

مثال 8.10

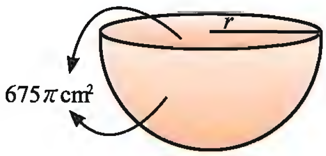


Fig. 8.25

ایک نصف کرّہ کا کل سطحی رقبہ 675π مربع سمر ہے۔اس کے منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔

حل : دیا گیا ہے کہ ٹھوس نصف کرّہ کا کل سطحی رقبہ

$$(\text{TSA})\ 3\pi r^2 = 675\,\pi \text{ sq. cm}$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 = 225$$

نصف کرّہ کا منحنی سطح کا رقبہ $\text{CSA} = 2\pi r^2 = 2\pi \times 225 = 450\,\pi \text{sq.cm.}$

مثال 8.11

ایک نصف کرّ وی برتن کی موٹائی 0.25cm ہے۔برتن کا اندرونی نصف قطر 5cm ہے۔برتن کے بیرونی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کرو r ، R اور w بالترتیب نصف کرّوی برتن کے اندرونی اور بیرونی نصف قطریں اور موٹائی ہیں۔

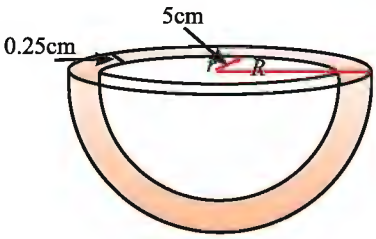


Fig. 8.26

دیا گیا ہے : $r = 5\,\text{cm},\ w = 0.25\,\text{cm}$

$$\therefore \quad R = r + w = 5 + 0.25 = 5.25\,\text{cm}$$

برتن کے بیرونی سطح کا رقبہ $= 2\pi R^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$$

لہٰذا برتن کے بیرونی سطح کا رقبہ $= 173.25$ sq.cm.

مشق 8.1

(1) ایک قائم مدوّر استوانہ 14cm نصف قطر اور 8cm اونچائی رکھتا ہے۔اس کے منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔

(2) ایک قائم مدور استوانہ کا کل سطحی رقبہ 660 مربع سمر ہے۔اگر اس کے قاعدہ کا قطر 14 سمر ہو تو استوانے کی اونچائی اور منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔

(3) ایک قائم مدور استوانے کا منحنی سطح کا رقبہ اور قاعدہ کا محیط بالترتیب 4400 مربع سمر اور 110 سمر ہیں۔اس کی اونچائی اور قطر معلوم کرو

(4) ایک عمارت میں 12 قائم مدوراستوانی ستون ہیں جن میں ہر ایک کا نصف قطر 50cm اور بلندی 3.5m ہے۔ان کے طرفی سطحوں کو رنگنے کا خرچ فی مربع میٹر ₹ 20 کے حساب سے معلوم کرو۔

(5) ایک قائم مدور استوانہ کا کل سطحی رقبہ 231 مربع سمر ہے۔اس کے منحنی سطح کا رقبہ، اس کے کل سطحی رقبہ کا دو تہائی ہے۔استوانے کا نصف قطر اور اونچائی معلوم کرو۔

(6) ایک قائم مدوّر استوانے کا کل سطحی رقبہ 1540 مربع سمر ہے۔اگر اس کی اونچائی، اس کے قاعدہ کے نصف قطر کا چار گنا ہو تو استوانے کی بلندی معلوم کرو۔

(7) دو قائم مدوّر استوانوں کے نصف قطروں کی نسبت 3:2 اور ان کی اونچائیوں کی نسبت 5:3 ہو تو ان کے منحنی سطح کے رقبوں میں نسبت معلوم کرو۔

(8) ایک کھو کھلے استوانے کا بیرونی منحنی سطح کا رقبہ 540π مربع سمر ہے۔اس کا اندرونی قطر 16cm اور اونچائی 15cm ہے۔ اس کا کل سطحی رقبہ معلوم کرو

(9) ایک استوانہ نما لوہے کے پائپ کا بیرونی قطر 25cm اور اس کی لمبائی 20cm ہے۔اگر پائپ کی موٹائی 1cm ہو تو پائپ کا کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔

(10) ایک ٹھوس قائم مدور مخروط کا نصف قطر اور اونچائی بالترتیب 7cm اور 24cm ہیں۔اس کے منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔

(11) ایک قائم مدور مخروط کا عمودی زاویہ اور نصف قطر بالترتیب 60° اور 15 سمر ہوں تو اس کی بلندی اور ترچھی بلندی معلوم کرو۔

(12) اگر ایک مخروط کے قاعدہ کا محیط 236cm اور اس کی ترچھی بلندی 12cm ہو تو اس کے منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔

(13) ایک دھان کا ڈھیر مخروطی شکل کا ہے جس کا قطر 4.2m اور اونچائی 2.8m ہے۔ڈھیر کو برسات سے حفاظت کرنے کے لئے کینوس (canvas) سے ڈھانکنے کے لئے درکار کینوس کا رقبہ معلوم کرو۔

(14) ایک قطاع دائرہ نما تھالی کا مرکزی زاویہ 180° اور نصف قطر 21cm ہے۔اس کے کناروں کو ملا کر ایک کھوکھلا مخروط بنایا جاتا ہے۔ مخروط کا نصف قطر معلوم کرو۔

(15) ایک مخروط کے نصف قطر اور ترچھی اونچائی کی نسبت 3:5 ہے۔اگر منحنی سطح کا رقبہ 60π مربع سمر ہو تو کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔

(16) ایک کرّہ کے منحنی سطح کا رقبہ 98.56 مربع سمر ہو تو اس کا نصف قطر معلوم کرو۔

(17) اگر ایک ٹھوس نصف کرّہ کے منحنی سطح کا رقبہ 2772 مربع سمر ہو تو اس کا کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔

(18) دو ٹھوس نصف کروں کے نصف قطروں کی نسبت 3:5 ہے۔ان کے منحنی سطح کے رقبوں کی نسبت اور کل سطحی رقبوں کی نسبت معلوم کرو۔

(19) ایک کھوکھلے نصف کرّہ کے منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطحی رقبہ معلوم کرو جس کے بیرونی اور اندرونی نصف قطریں 4.2cm اور 2.1cm ہیں

(20) ایک عمارت کے نصف کرّوی گنبد کو رنگنا ہے۔اگر اس کے قاعدہ کا محیط 17.6m ہو تو اس کو رنگنے کا خرچ ₹ 5 فی مربع میٹر کے حساب سے معلوم کرو۔

8.3 حجم (Volume)

اب تک ہم ان مسئلوں کے بارے میں جان چکے ہیں جو چند ٹھوس اجسام کے سطحی رقبوں سے تعلق رکھتے ہیں۔اب ہمیں معلوم کرنا ہے کہ چند مانوس ٹھوس اجسام کے حجم کو کس طرح محسوب کیا جاتا ہے حجم کے لفظی معنی خالی جگہ کو پُر کرنا ہے۔ایک ٹھوس کی عددی خصوصیت (Numerical Characteristic) اس کا حجم ہے۔مثال کے طور پر ایک جسم کو مکعبوں کی اکائیوں میں الگ الگ کیا جا سکتا ہے۔ (اکائی ضلع رکھنے والا مکعب) ۔ تب اس کا حجم، ان الگ کیئے ہوئے مکعبوں کے حجم کے مساوی ہوگا۔

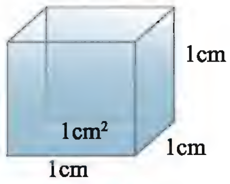


Fig. 8.27

خاکہ میں دکھایا گیا مکعب کا حجم

= لمبائی × چوڑائی × اونچائی

$= 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3.$

مثال کے طور پر ہم کہیں کہ ایک شئے کا حجم 100 مکعب سمر ہے تو اس کے یہ معنے ہوئے کہ اس شئے کو پُر کرنے کے لئے ہمیں 100 مکعبوں کی ضرورت ہے، جس میں ہر ایک کا حجم 1 cm^3 ہے۔

سطحی رقبہ ہی کی طرح حجم ایک مثبت مقدار ہے اور یہ بھی ہٹاؤ کے لحاظ سے بدلتی ہے۔ بعض ٹھوس اشیاء کے حجم ذیل میں دئے گئے ہیں.

8.3.1 ایک قائم مدور استوانے کا حجم

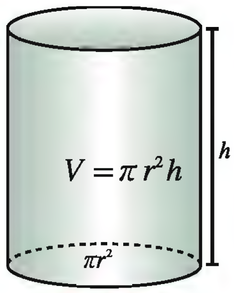


Fig. 8.28

(i) ایک ٹھوس قائم مدوّر استوانہ کا حجم

ایک ٹھوس قائم مدوّر استوانہ کا حجم اس کے قاعدہ کے رقبہ اور اونچائی کا حاصلِ ضرب ہے۔

استوانے کا حجم، یعنی , V = قاعدہ کا رقبہ × بلندی

$= \pi r^2 \times h$

استوانے کا حجم , $V = \pi r^2 h$ cu. units.

(ii) کھوکھلے استوانہ کا حجم (استعمال شدہ شئے کا حجم)

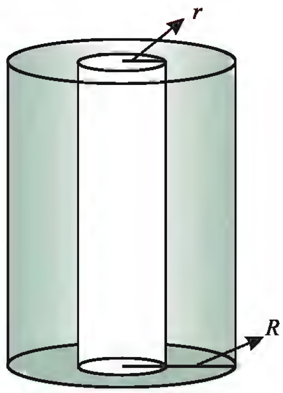


Fig. 8.29

فرض کرو ایک قائم مدوّر کھوکھلے استوانے کے بیرونی اور اندرونی نصف قطریں بالترتیب R اور r ہیں۔

فرض کرو کہ اس کی اونچائی h ہے۔

حجم V = بیرونی استوانے کا حجم − اندرونی استوانے کا حجم

$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$

لہٰذا کھوکھلے استوانے کا حجم $V = \pi h (R^2 - r^2)$ cu. units.

مثال 8.12

اگر ایک قائم مدور استوانے کا منحنی سطحی رقبہ 704 مربع سمر اور اونچائی 8cm ہو تو استوانے کی گنجائش لیٹروں میں معلوم کرو۔

($\pi = 22/7$ لیں)

حل : فرض کرو استوانے کی اونچائی اور منحنی سطح کا رقبہ بالترتیب h اور C ہیں۔

یہاں h = 8cm ، CSA = 704 مربع سمر

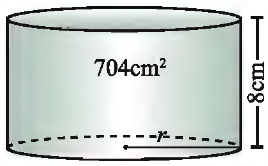


Fig. 8.30

$$CSA = 704$$

$$\Longrightarrow \quad 2\pi r h = 704$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 8 = 704$$

$$\therefore \quad r = \frac{704 \times 7}{2 \times 22 \times 8} = 14\text{ cm}$$

استوانے کا حجم $V = \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 8$

$= 4928$ cu.cm.

چنانچہ استوانہ کا حجم $= 4.928$ litres. (1000 cu.cm = 1 litre)

مثال 8.13

ایک کھوکھلے استوانی لوہے کے پائپ کی لمبائی 28cm ہے۔اس کے بیرونی اور اندرونی قطریں بالترتیب 8cm اور 6cm ہیں.

اگر ایک مکعب سمر لوہے کا وزن 7 گرام ہو تو پائپ کا حجم اور وزن معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کرو ایک کھوکھلے استوانے کا اندرونی، بیرونی نصف قطر اور اونچائی بالترتیب r ، R اور h ہیں

یہاں $2r = 6$cm ، $2R = 8$cm ، $h = 28$cm

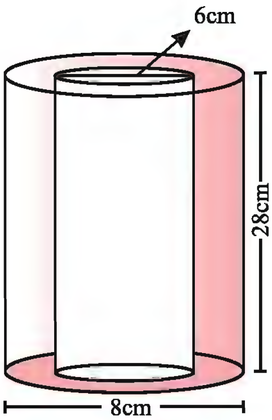


Fig. 8.31

پائپ کا حجم $V = \pi \times h \times (R + r)(R - r)$

$= \frac{22}{7} \times 28 \times (4 + 3)(4 - 3)$

$\therefore$ حجم , $V = 616$ cu. cm

ایک مکعب سمر دھات کا وزن $= 7$ gm

616 مکعب سمر دھات کا وزن $= 7 \times 616$ gm

پائپ کا وزن $= 4.312$ kg.

مثال 8.14

ایک قائم مدوّر استوانے کے قاعدہ کا رقبہ اور حجم بالترتیب 13.86 مربع سمر اور 69.3 مکعب سمر ہے۔اس کی اونچائی اور منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کرو استوانے کے قاعدہ کا رقبہ اور حجم بالترتیب A اور V ہیں دیا گیا ہے کہ :

قاعدہ کا رقبہ $A = \pi r^2 = 13.86$ sq.cm

حجم , $V = \pi r^2 h = 69.3$ cu.cm.

$\pi r^2 h = 69.3$

$\Longrightarrow \quad 13.86 \times h = 69.3$

$\therefore \quad h = \frac{693}{13.86} = 5$ cm.

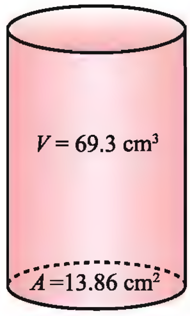


Fig. 8.32

قاعدہ کا رقبہ $= \pi r^2 = 13.86$

$\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$

$r^2 = 13.86 \times \frac{7}{22} = 4.41 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{4.41} = 2.1$ cm.

منحنی سطح کا رقبہ CSA = $2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 5$

منحنی سطح کا رقبہ CSA = 66 sq.cm.

8.3.2۔ ایک قائم مدور مخروط کا حجم

فرض کریں کہ r اور h ایک قائم مدور مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر اور اونچائی ہیں۔

مخروط کا حجم اس ضابطہ سے دیا جاتا ہے۔ $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ cu. units.

اس کو درجِ ذیل کارروائی سے بتائیں۔

کارروائی

مساوی اونچائی اور مساوی نصف قطر کا ایک کھوکھلا مخروط اور کھوکھلا استوانہ بناؤ جیسا کہ نقشہ میں بتلایا گیا ہے۔ اب ہم عملی طور پر ذیل کے طریقہ سے مخروط کا حجم معلوم کریں گے۔ مخروط کو ریت یا مائع سے بھرو اور پھر اس کو استوانہ میں انڈیلو۔ تیسری مرتبہ انڈیلنے پر استوانہ پورے طور پر ریت سے مائع بھر جائے گا۔

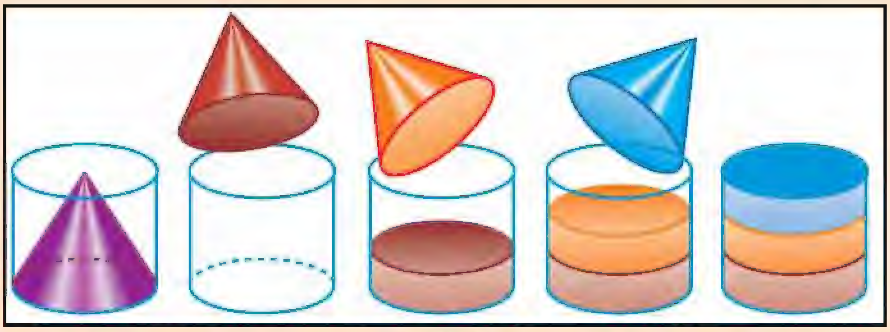


Fig. 8.33

اس آسان عمل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر استوانے کا نصف قطر اور اونچائی بالترتیب r اور h ہو تو

استوانہ کا حجم $= \pi r^2 h$ = 3 × (مخروط کا حجم) =

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ cu. units.

مثال 8.15

ایک ٹھوس مدور استوانہ کا حجم 4928 مکعب سمر ہے۔ اگر اس کی اونچائی 24cm ہو تو اس کا نصف قطر معلوم کرو۔ ($\pi = 22/7$ لیں)

حل : فرض کرو ٹھوس مخروط کا نصف قطر، اونچائی اور حجم بالترتیب r ، h اور V ہیں۔

دیا گیا ہے۔ $V = 4928$ cm³ ; $h = 24$ cm

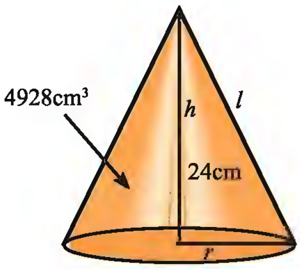


Fig. 8.34

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4928$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 24 = 4928$$

$$\Longrightarrow r^2 = \frac{4928 \times 3 \times 7}{22 \times 24} = 196.$$

مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر , $r = \sqrt{196} = 14$ cm.

8.3.3۔ مخروط کے مقطوعہ کا حجم (Volume of a Frustum of a cone)

آیئے ہم ایک ٹھوس قائم مدوّر مخروط لیں اور اس کو دو حصّوں میں اس طرح کاٹیں کہ دو چھوٹے قائم مدور مخروط حاصل ہو جائیں۔ ایک حصہ مخروط اور دوسرا حصہ مقطوعہ (Frustum) کہلائے گا۔اس کو درجِ ذیل کارروائی سے بتائیں۔

کارروائی

تھوڑی چکنی مٹی لو اور اس سے ایک قائم مدور مخروط بناؤ۔اس کے قاعدہ کے متوازی ایک چاقو سے کاٹ دو اور چھوٹے مخروط کو الگ کر دو۔آپ کے پاس کونسا حصّہ باقی ہے۔مخروط کا بچا ہوا حصّہ مخروط کا مقطوعہ (Frustum) کہلاتا ہے۔لاطینی لفظ FRUSTUM کے معنی " کٹا ہوا حصّہ " کے ہیں۔اور اس کی جمع FRUSTA ہے۔

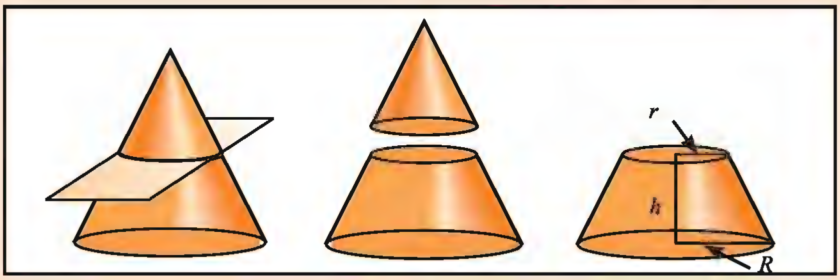


Fig. 8.35

لہٰذا اگر ایک قائم مدور مخروط کو اس کے قاعدے کے متوازی کاٹا جائے تو قاعدے کا حصہ اس مخروط کا مقطوعہ کہلائے گا۔لہٰذا ایک مقطوعہ میں دو مدور تھالیاں ہیں ایک اوپری جانب اور دوسرا نچلی جانب۔

آیئے ایک مخروط کے مقطوعہ کا حجم معلوم کریں۔

مخروط کے مقطوعہ کا حجم دو قائم مدوّر مخروطوں کے حجم کے فرق کے مساوی ہے۔(خاکہ 8.35 کو دیکھو) ۔ ایک قائم مدوّر مخروط کے مقطوعہ کو غور کریں۔

فرض کریں کہ مخروط کا نصف قطر R ہے۔ کاٹ کر نکالنے کے بعد فرض کریں کہ چھوٹے مخروط کا نصف قطر r اور x اس کی بلندی ہو۔ فرض کریں کہ h مقطوعہ کی اونچائی ہے۔

مخروط کے مقطوعہ کا حجم $V =$ بڑے مخروط کا حجم $-$ چھوٹے مخروط کا حجم

$$= \frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times(x+h) - \frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times x$$

$$\text{حجم} \quad V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2-r^2)+R^2h] \qquad (1)$$

خاکہ 8.36 سے ہمیں معلوم ہوا کہ $\Delta BFE \sim \Delta DGE$

$$\therefore \frac{BF}{DG} = \frac{FE}{GE}$$

$$\Longrightarrow \frac{R}{r} = \frac{x+h}{x}$$

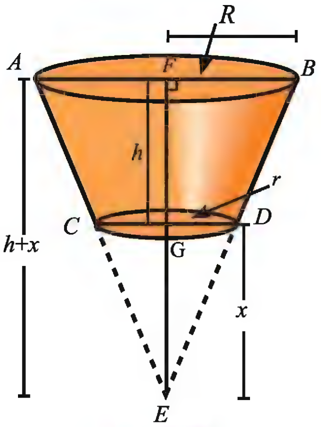


Fig. 8.36

$$\Longrightarrow \quad Rx - rx = rh$$

$$\Longrightarrow \quad x(R-r) = rh$$

لہٰذا ہمیں حاصل ہوا $\quad x = \dfrac{rh}{R-r} \qquad (2)$

$$(1) \Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2 h]$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[x(R-r)(R+r) + R^2 h]$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[rh(R+r) + R^2 h] \text{ using } (2)$$

مخروط کے مقطوعہ کا حجم =

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) \text{ cu. units.}$$

غور کریں

* مخروط کے مقطوعہ کے منحنی سطح کا رقبہ $= \pi(R+r)l$; جہاں $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

* مخروط کے مقطوعہ کا کل سطحی رقبہ $= \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2, l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

(* یہ حصہ امتحان کے لئے نہیں ہے۔)

مثال 8.16

ایک مخروط کے مقطوعہ کے شکل کی بالٹی (بکٹ)(bucket) کے دو مدوّر کناروں کے نصف قطر 15cm اور 8cm ہیں۔ اگر اس کی گہرائی 63cm ہو تو اس کی گنجائش لیٹروں میں معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کرو بکٹ کے بالائی اور نچلی مدوّر کناروں کے نصف قطر بالترتیب R اور r اور گہرائی h ہیں

Fig. 8.37

بکٹ (مخروط کے مقطوعہ) کا حجم =

$$= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 63 \times (15^2 + 8^2 + 15 \times 8)$$

$$= 26994 \text{ cu.cm.}$$

$$= \frac{26994}{1000} \text{ litres} \qquad (1000 \text{ cu.cm} = 1 \text{ litre})$$

لہٰذا بکٹ کا حجم = 26.994 لیٹر

8.3.4۔ کرّہ کا حجم

(i) ایک ٹھوس کرّہ کا حجم

آیئے ایک آسان تجربہ کی مدد سے ایک کرہ کا حجم معلوم کریں۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ cu.units.}$$

کارروائی

پانی سے بھرا ہوا ایک استوانہ لو جس کا نصف قطر R اور اونچائی h ہو۔ استوانے کے اندر ایک کرّہ جس کا نصف قطر r ہو (جہاں R>r ہے) داخل کرو اور ہٹائے ہوئے پانی کا حجم معلوم کرو۔

کرّہ کا حجم ، ہٹائے ہوئے پانی کے حجم کے برابر ہے۔

لہٰذا کرّہ کا حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ cu.units.

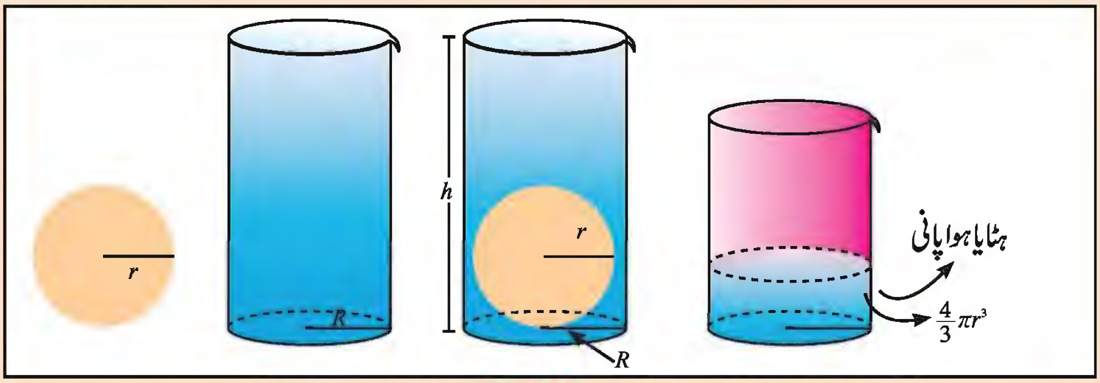


Fig. 8.38

(ii) کھوکھلے کرّہ کا حجم (استعمال شدہ شئے کا حجم)

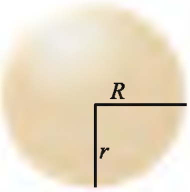


Fig. 8.39

اگر کرّہ کے اندرونی اور بیرونی نصف قطریں بالترتیب r اور R ہوں تو

کھوکھلے استوانہ کا حجم = بیرونی کرّہ کا حجم – اندرونی کرّہ کا حجم

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

کھوکھلے کرّہ کا حجم = $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ cu. units. مکعب اکائیاں

(ii) ایک ٹھوس نصف کرّہ کا حجم

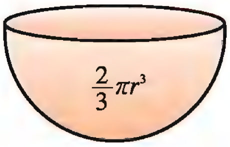


Fig. 8.40

ایک ٹھوس نصف کرّہ کا حجم = ½ × کرّہ کا حجم

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ cu.units. مکعب اکائیاں

(iii) ایک کھوکھلے نصف کرّہ کا حجم (استعمال شدہ شئے کا حجم)

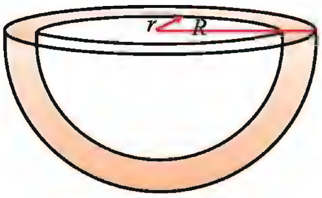


Fig. 8.41

ایک کھوکھلے نصف کرّہ کا حجم = بیرونی نصف کرّہ کا حجم – اندرونی نصف کرّہ کا حجم

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times r^3$$

$= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ cu.units. مکعب اکائیاں

مثال 8.17

ایک دھاتی گولے (short put) کا حجم معلوم کرو جس کا قطر 8.4 cm ہے۔ ($\pi = 22/7$ لیں)

حل : فرض کرو کہ دھاتی گولے کا نصف قطر r ہے۔

Fig. 8.42

یہاں $2r = 8.4\text{ cm} \implies r = 4.2\text{ cm}$

دھاتی گولہ کا حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10}$$

دھاتی گولہ کا حجم $= 310.464$ cu.cm.

مثال 8.18

ایک مخروط، ایک نصف کرّہ اور ایک استوانہ مساوی قاعدہ رکھتے ہیں اگر مخروط اور استوانے کی اونچائی اور ان کے مشترک نصف قطر بھی مساوی ہوں تو ان کے حجموں میں نسبت معلوم کرو۔

حل : فرض کرو مخروط، نصف کرّہ اور استوانہ کا مشترک نصف قطر r ہے

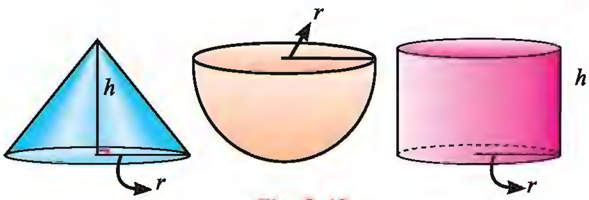


Fig. 8.43

فرض کرو مخروط اور استوانے کی مشترکہ اونچائی h ہو۔

دیا گیا ہے : r = h

فرض کرو مخروط، نصف کرّہ اور استوانہ کا حجم

بالترتیب V_1, V_2 اور V_3 ہوں

اب $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^2 h$

$$\implies \quad = \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3 \qquad (\text{یہاں}, r = h)$$

$$\implies V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$$

لہٰذا مطلوبہ نسبت $= 1 : 2 : 3.$

مثال 8.19

اگر ایک کرّہ کا حجم $7241\frac{1}{7}$ مکعب سم ہو تو اس کا نصف قطر معلوم کرو۔ ($\pi = 22/7$ لیں)

حل : فرض کرو کرّہ کا نصف قطر اور حجم بالترتیب r اور V ہیں۔

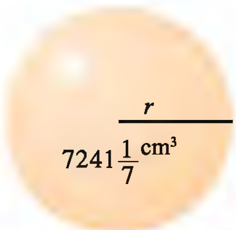


Fig. 8.44

دیا گیا ہے $V = 7241\frac{1}{7}$ cu.cm

$$\implies \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$\implies \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$r^3 = \frac{50688}{7} \times \frac{3\times 7}{4\times 22}$$

$$= 1728 = 4^3 \times 3^3$$

لہٰذا کرہ کا نصف قطر $r = 12$ cm.

مثال 8.20

ایک کھوکھلے استوانہ کا حجم $\frac{11352}{7}$ cm^3 ہے۔اس کا بیرونی نصف قطر 8cm ہو تو اندرونی نصف قطر معلوم کرو۔($\pi = 22/7$ لیں)

حل : فرض کرو R اور r بالترتیب ایک کھوکھلے استوانے کے بیرونی اور اندرونی نصف قطر ہیں

فرض کرو کھوکھلے استوانہ کا حجم V ہے۔ دیا گیا ہے

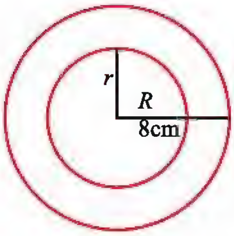


Fig. 8.45

$$V = \frac{11352}{7} \text{ cm}^3$$

$$\Longrightarrow \quad \pi \quad \frac{4}{3}\,(R^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}(8^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$512 - r^3 = 387 \;\Longrightarrow\; r^3 = 125 = 5^3$$

کھوکھلے استوانے کا اندرونی نصف قطر , $r = 5$ cm.

مشق 8.2

(1) ایک استوانہ کا حجم معلوم کرو جس کا نصف قطر 14cm اور اونچائی 30cm ہے

(2) ایک ہسپتال میں ایک مریض کو روزانہ 7cm قطر کے استوانی برتن میں شوربہ دیا جاتا ہے۔اگر برتن شوربہ سے 4 سمر کی اونچائی تک بھرا ہوا ہو تو 250 مریضوں کو دینے کے لئے ہسپتال کو کتنا شوربہ تیار کرنا ہوگا ؟

(3) ایک ٹھوس قائم مدوّر استوانے کے قاعدہ کے نصف قطر اور اونچائی کا حاصلِ جمع 37cm ہے۔اگر استونے کے کل سطح کا رقبہ 1628 مربع سمر ہو تو استوانے کا حجم معلوم کرو۔

(4) ایک ٹھوس استوانہ کا حجم 62.37 مکعب سمر ہے۔اگر اس کی اونچائی 4.5cm ہو تو اس کا نصف قطر معلوم کرو۔

(5) اگر دو قائم مدوّر استوانے کے نصف قطروں کی نسبت 2:3 ہے۔ اگر ان کی اونچائیوں کی نسبت 5:3 ہو تو ان کے حجموں کی نسبت معلوم کرو۔

(6) ایک استوانے کے نصف قطر اور اونچائی کی نسبت 5:7 ہے۔اگر اس کا حجم 4400 cu.cm. ہو تو استوانے کا نصف قطر معلوم کرو۔

(7) 66cm × 12cm مستطیل نما لوہے کی چادر کو لپیٹ کر 12 سمر اونچا ایک استوانہ بنایا جائے تو اس کا حجم معلوم کرو۔

(8) ایک پنسل کی شکل ایک قائم مدوّر استوانے کی ہے۔پنسل کی لمبائی 28cm ہے اور اس کا نصف قطر 3mm ہے۔اگر پنسل کے سُرمہ (نوک) کا نصف قطر 1mm ہو تو پنسل میں استعمال کی ہوئی لکڑی کا حجم کیا ہے ؟

(9) ایک مخروط کا نصف قطر اور ترچھی بلندی بالترتیب 20cm اور 29cm ہے اس کا حجم معلوم کرو۔

(10) 12m اونچے ایک لکڑی کے ٹھوس مخروط کے قاعدے کا محیط 44m ہے۔ اس کا حجم معلوم کرو۔

(11) ایک برتن کی شکل مخروط کے مقطوعہ کی سی ہے۔ اس کے ایک سرے کا نصف قطر اور اونچائی بالترتیب 8cm اور 14cm ہے۔ اگر اس کا حجم $\frac{5676}{3}$ cm^3 ہو تو دوسرے سرے کا نصف قطر معلوم کرو۔

(12) ایک مخروط کے مقطوعہ کے کناروں کا محیط 44cm اور $8.4\ \pi$ cm ہے۔ اس کی گہرائی 14cm ہو تو اس کا حجم معلوم کرو۔

(13) ایک مثلثِ قائمۃ الزاویہ ABC کے اضلاع 5cm، 12cm اور 13cm ہیں۔ اس کو ضلع 12cm پر گردش دی جائے تو اس سے حاصل ہونے والے ٹھوس شئے کا حجم معلوم کرو

(14) ایک قائم مدوّر مخروط کے نصف قطر اور اونچائیوں کی نسبت 2:3 ہے۔ اگر اس کا حجم 100.48cu.cm ہو تو اس کی ترچھی بلندی معلوم کرو۔ ($\pi = 3.14$ لو)

(15) ایک مخروط جس کا قاعدہ دائرہ نما ہے، اس کا حجم $216\ \pi$ مکعب سمر ہے۔ اگر قاعدہ کا نصف قطر 9cm ہو تو مخروط کی بلندی دریافت کرو۔

(16) 200 کروّی دھاتی چھرّوں کی کمیت (Mass) معلوم کرو۔ ہر ایک کا نصف قطر 0.7cm ہے۔ دیا گیا ہے کہ فولاد کی کثافت 7.95 g/cm^3 ہے۔ (کثافت × حجم = کمیت)

(17) ایک کھوکھلے کرّہ کے بیرونی اور اندرونی نصف قطریں بالترتیب 12cm اور 10cm ہیں۔ اسکا حجم معلوم کرو۔

(18) ایک نصف کرّہ کا حجم 1152π مکعب سمر ہے۔ اس کے منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرو۔

(19) 14 سمر ضلع رکھنے والے ایک مکعب سے کاٹے جانے والے بڑے سے بڑا قائم مدوّر مخروط کا حجم معلوم کرو۔

(20) ہوا کے پھونک مارنے پر غبارہ (balloon) کا نصف قطر 7cm سے 14cm ہو جاتا ہے۔ ان دو حالتوں میں اس کے حجموں میں کیا نسبت ہوگی۔

8.4۔ ٹھوس اجسام کا ربط (Combination of solids)

ہم روزمرّہ کی زندگی میں مختلف اشیاء کو دیکھتے ہیں جیسے کھلونے، سواریاں، برتن، اوزار وغیرہ دو یا دو سے زیادہ ٹھوس شکلوں سے مل کر بنے ہوئے ہیں۔

ایسی مربوط اشیاء کے ہم سطحی رقبے اور حجم کیسے معلوم کر سکتے ہیں ؟

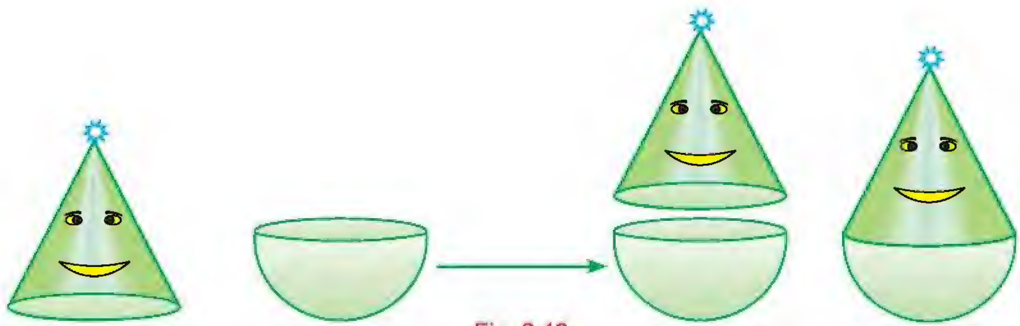


Fig. 8.46

یہ ضروری نہیں کہ مربوط ٹھوس شئے کے کل سطحی رقبہ، ٹھوس اشیاء کے سطحی رقبوں کے مجموعے کے مساوی ہوں، جب کہ اوپر دی گئی شکلوں میں، مربوط شکلوں کے کل سطحی رقبے، نصف کرہ کے منحنی سطح کے رقبے اور مخروط کے منحنی سطح کے رقبے کے حاصل جمع کے مساوی ہے، مگر ٹھوس شئے کا حجم مربوط شکل کے حجموں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

اس طرح

مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ + نصف کرّہ کے منحنی سطح کا رقبہ = ٹھوس شئے کا کل سطحی رقبہ

نصف کرّہ کا حجم + مخروط کا حجم = ٹھوس شئے کا حجم

مثال 8.21

ایک ٹھوس لکڑی کا کھلونا مخروط کی شکل کا ہے جو ایک نصف کرّہ پر رکھا گیا ہے۔ اگر نصف کرّہ کا نصف قطر اور مخروط کا قاعدہ 3.5 سمر ہو اور کھلونے کی کل اونچائی 17.5cm ہو تو کھلونے میں استعمال شدہ لکڑی کا حجم معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

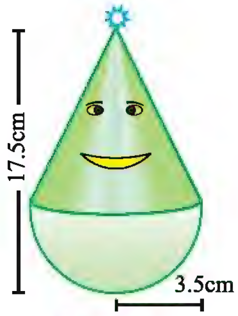


Fig. 8.47

مخروطی حصّہ :

نصف قطر , $r = 3.5$ cm

اونچائی , $h = 17.5 - 3.5 = 14$ cm

نصف کروی حصّہ :

نصف قطر , $r = 3.5$ cm

مخروط کا حجم + نصف کرّہ کا حجم = لکڑی کا حجم

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{\pi r^2}{3}(2r + h)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{3} \times (2 \times 3.5 + 14) = 269.5$$

لہٰذا کھلونے میں استعمال شدہ لکڑی کا حجم = 269.5 cu.cm

مثال 8.22

ایک کپ (Cup) نصف کرّوی شکل کا ہے، جس پر استوانہ رکھا ہوا ہے استوانہ نما حصّہ کی اونچائی 8cm اور کل اونچائی 11.5cm ہے۔ کپ کا کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل :

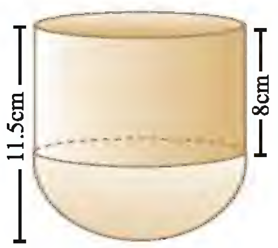


Fig. 8.48

استوانی حصّہ

اونچائی $h = 8$cm

نصف قطر، $r = 3.5$cm $\frac{7}{2}$ cm

نصف کروی حصّہ

نصف قطر = اونچائی – 8

$\Longrightarrow$ نصف قطر $r = 11.5 - 8 = 3.5$cm

نصف کرّہ کے منحنی سطح کا رقبہ + استوانی حصّہ کے منحنی سطح کا رقبہ = کپ کا کل سطحی رقبہ

$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2} + 8\right)$$

کپ کا کل سطحی رقبہ = 253 مربع سمر

مثال 8.23

ایک سرکس کا خیمہ نصب کرنا ہے جس کی شکل مخروطی ہے جو استوانی حصّہ پر رکھا گیا ہے۔ خیمہ کی کل اونچائی 49 m ہے۔ قاعدہ کا قطر 42m ہے استوانہ کی اونچائی 21m ہے۔ خیمہ کو بنانے کے لئے درکار کینوس (Canvas) کی قیمت معلوم کرو اگر کینوس کی قیمت ₹ 12.50 فی مربع میٹر ہے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

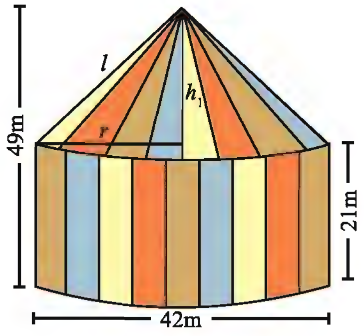


Fig. 8.49

حل :

مخروطی حصّہ		استوانی حصّہ	
نصف قطر	$r = 21$ m	قطر	$2r = 42$ m
اونچائی	$h_1 = 49 - 21 = 28$ m	نصف قطر	$r = 21$ m
ترچھی بلندی،	$l = \sqrt{h_1^2 + r^2}$	اونچائی	$h = 21$ m
	$= \sqrt{28^2 + 21^2}$		
	$= 7\sqrt{4^2 + 3^2} = 35$ m		

مخروطی حصّہ کے منحنی سطح کا رقبہ + استوان حصّہ کے منحنی سطح کا رقبہ = درکار کینوس کا کل رقبہ

$$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21(2 \times 21 + 35) = 5082$$

کینوس کا رقبہ $= 5082 \ m^2$

فی مربع میٹر کینوس کی قیمت $=$ ₹12.50

کینوس کی کل قیمت $= 5082 \times 12.5 =$ ₹63525.

مثال 8.24

ایک کھوکھلا کرّہ جس کا بیرونی اور اندرونی قطر بالترتیب 8cm اور 4cm ہیں، پگھلا کر دوسری ٹھوس شئے جو قائم مدوّر مخروط ہے، بنائی جاتی ہے جس کے قاعدہ کا قطر 8cm ہے۔ مخروط کی اونچائی معلوم کرو۔

حل : فرض کرو R اور r بالترتیب کھوکھلے کرّہ کے بیرونی اور اندرونی نصف قطر ہیں۔

فرض کریں کہ h اور r1 بنائے جانے والے مخروط کی اونچائی اور نصف قطر ہیں۔

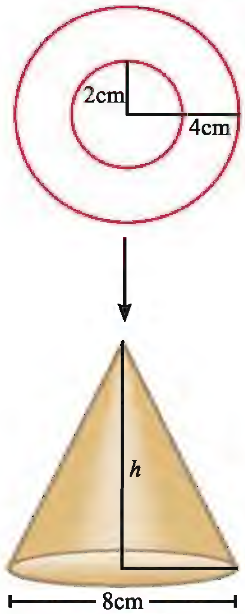


Fig. 8.50

کھوکھلا کرّہ			
بیرونی	اندرونی	مخروط	
$2R = 8$ cm	$2r = 4$ cm	$2r_1 = 8$	
$\Longrightarrow R = 4$ cm	$\Longrightarrow r = 2$ cm	$\Longrightarrow r_1 = 4$	

کھوکھلے کرّہ کو پگھلا کر مخروط بنانے پر

کھوکھلے کرّہ کا حجم = مخروط کا حجم

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi[R^3 - r^3]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times(4^3-2^3)$$

$$\Longrightarrow \quad h = \frac{64-8}{4}=14$$

مخروط کی بلندی $h = 14\text{ cm}.$

مثال 8.25

1.4 cm قطر والی کروی شکل کی گولیوں کو، 7 سمر نصف قطر والے ایک استوانی بیکر جس میں تھوڑا پانی ہے، اس میں ڈالی جاتی ہیں۔ پانی کی سطح میں 5.6cm کے اضافہ کے لئے کتنی گولیاں ڈالی جانی چاہئے؟

حل : فرض کریں کہ n عدد گولیاں درکار ہیں۔ فرض کریں کہ گولیوں اور استوانہ کا نصف قطر بالترتیب r_1 اور r_2 ہیں۔

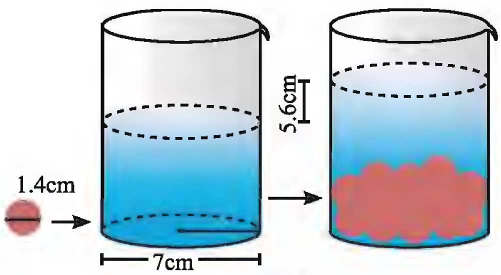


Fig. 8.51

استوانی بیکر	سنگ مرمر کی گولیاں
قطر $, 2r_2 = 7\text{ cm}$	قطر $, 2r_1 = 1.4\text{ cm}$
نصف قطر $r_2 = \frac{7}{2}\text{ cm}$	نصف قطر $r_1 = 0.7\text{ cm}$

اضافہ شدہ پانی کے سطح کی اونچائی $h = 5.6\text{cm}$

گولیوں کو بیکر میں ڈالنے کے بعد

اضافہ شدہ پانی کا حجم = n گولیوں کا حجم

$$\Longrightarrow \quad \pi r_2^2 h = n\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$$

$$n = \frac{3r_2^2 h}{4r_1^3}$$

$$n = \frac{3\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times5.6}{4\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}} = 150.$$

چنانچہ درکار گولیوں کی تعداد 150 ہے۔

مثال 8.26

14 سمر قطر والے ایک پائپ کے ذریعہ 15 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے پانی بہتا ہے۔ یہ پانی 50m لمبے اور 44m چوڑے ایک استوانہ نما ٹینک میں گرتا ہے۔ کتنے گھنٹوں میں ٹینک کے پانی کی سطح میں 21cm کا اضافہ ہوگا ؟ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : پانی کی رفتار = 15 کلومیٹر / گھنٹہ = 15000 میٹر / گھنٹہ

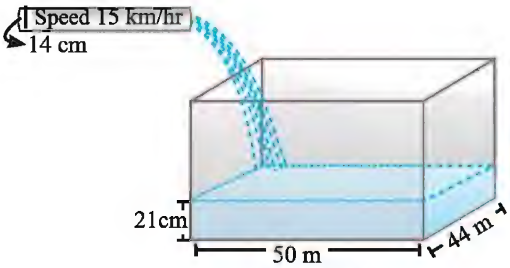


Fig. 8.52

پائپ کا قطر $, 2r = 14\text{ cm}$

$$r = \frac{7}{100}\text{ m.}$$

فرض کریں کہ پانی کی سطح میں اضافہ h ہے۔

$$h = 21\text{ cm} = \frac{21}{100}\text{m}$$

رفتار × وقت × پائپ کی عمودی تراش کا رقبہ = خارج کردہ پانی کا حجم

ایک گھنٹہ میں خارج کردہ پانی کا حجم $= \pi r^2 \times 1 \times 15000$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 15000 \text{ cu.m}$$

ٹینک میں مطلوبہ مقدار کے پانی کا حجم =

$$lbh = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

فرض کرو مطلوبہ مقدار کا پانی حاصل ہونے میں T گھنٹے لگ جائیں گے

∴ T گھنٹوں میں خارج شدہ پانی کا حجم = ٹینک میں مطلوبہ مقدار کے پانی کا حجم

$$\Longrightarrow \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{100}\right)^2 \times T \times 15000 = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

وقت T = 2 گھنٹے

لہٰذا درکار پانی کی سطح میں اضافہ کے لئے 2 گھنٹے لگیں گے۔

مثال 8.27

ایک لوہے کی سِل (slab) جس کے ابعاد 55cm × 40cm × 15cm ہیں، پگھلا کر ایک پائپ کی شکل میں ڈھالا جاتا ہے۔ پائپ کا بیرونی قطر اور موٹائی بالترتیب 8cm اور 1cm ہیں۔ پائپ کی لمبائی معلوم کرو۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیں)

حل : فرض کریں کہ پائپ کی لمبائی h1 ہے۔

فرض کریں کہ R اور r پائپ کے بالترتیب بیرونی اور اندرونی قطر ہیں۔

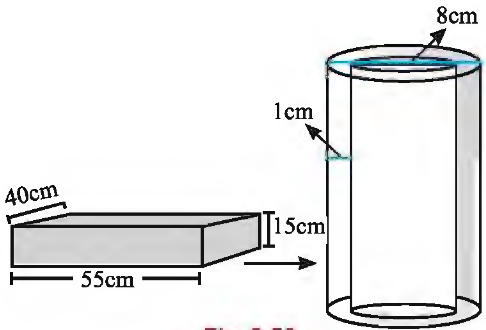


Fig. 8.53

لوہے کی سِل کے ابعاد $= l\,b\,h =$ 55cm × 40cm × 15cm

لوہے کا پائپ

بیرونی قطر $2R = 8\text{cm}$

بیرونی نصف قطر $R = 4\text{cm}$

موٹائی $w = 1\text{cm}$

اندرونی نصف قطر $r = R - w = 4 - 1 = 3\text{cm}$

لوہے کی سِل کا حجم = لوہے کے پائپ کا حجم

$$\Longrightarrow \pi h_1 (R + r)(R - r) = lbh$$

یعنی $\frac{22}{7} \times h_1 (4 + 3)(4 - 3) = 55 \times 40 \times 15$

پائپ کی لمبائی $h_1 = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m.}$

مشق 8.3

(1) ایک لٹّونما کھلونا مخروطی ہے جس پر نصف کرّہ رکھا گیا ہے۔نصف کرّہ کا قطر 3.6 سمر ہے۔لٹّو کی کل اونچائی 4.2 سمر ہے۔ اس کا کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔

(2) ایک ٹھوس شئے کی شکل استوانی ہے جو ایک نصف کرّہ پر رکھی گئی ہے۔ٹھوس شئے کا قطر اور کل اونچائی بالترتیب 21cm اور 25.5cm ہیں اس کا حجم معلوم کرو۔

(3) ایک دوائی کیپسول استوانہ کی شکل کا ہے جس کے دونوں کناروں پر نصف کروی شکلیں لگی ہوئی ہیں۔کیپسول کی کل لمبائی 14mm اور کیپسول کا قطر 5mm ہے۔اس کا سطحی رقبہ معلوم کرو۔

(4) ایک خیمہ کی شکل استوانی ہے جس کے اوپر ایک مخروط ہے۔اس کی کل اونچائی اور قطر بالترتیب 13.5m اور 28m ہیں۔اگر استوانی حصّہ کی اونچائی 3m ہو تو خیمہ کا کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔

(5) ایک طالب علم نے چکنی مٹی سے ایک مخروط بنایا جس کی اونچائی 48cm اور قاعدہ کا نصف قطر 12cm ہے۔ایک اور طالب علم نے اس کو ایک کرّہ کی شکل میں تبدیل کردیا۔ کرّہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

(6) ایک ٹھوس کرّہ کا نصف قطر 24cm ہے۔اس کو پگھلا کر مساوی عمودی تراش کی ایک لمبی تار کھینچی جاتی ہے۔اگر تار کا نصف قطر 1.2mm ہو تو تار کی لمبائی معلوم کرو۔

(7) ایک مخروطی برتن جس کا اندرونی نصف قطر 5cm اور اونچائی 24cm ہے، پانی سے بھرا ہوا ہے۔اس پانی کو ایک استوانی برتن میں ڈالا جاتا ہے جس کا اندرونی نصف قطر 10cm ہے۔استوانی برتن میں پانی کے سطح کی بلندی معلوم کرو۔

(8) 6cm قطر کے ایک کرّہ کو 12cm قطر کے ایک قائم مدوّر استوانی برتن میں ڈالا جاتا ہے جس کا تھوڑا حصّہ پانی سے بھرا ہوا ہے۔ اگر کرّہ پانی میں پوری طرح ڈوب جائے تو بتاؤ استوانی برتن کے پانی کی سطح میں کتنا اضافہ ہوگا ؟

(9) 7cm اندرونی نصف قطر کے ایک استوانی پائپ سے 5cm/sec کی رفتار سے پانی خارج ہوتا ہے۔آدھے گھنٹے میں پائپ سے خارج شدہ پانی کا حجم (لیٹروں میں) معلوم کرو۔

(10) 4m قطر اور 10m اونچائی والے ایک استوانی ٹینک سے 10 cm قطر والے ایک پائپ کے ذریعہ 2.5km/hr کی شرح سے پانی خارج کیا جارہا ہے۔ آدھا ٹینک پانی خالی ہونے کے لئے کتنا وقت لگے گا۔ فرض کرو کہ ٹینک پہلے پانی سے پوری طرح بھرا تھا۔

(11) ایک ٹھوس کرّہ کا نصف قطر 18cm ہے۔اس کو پگھلا کر تین چھوٹے ٹھوس کرّے بنائے جاتے ہیں۔اگر دو کروں کے نصف قطر 2cm اور 12cm ہوں تو تیسرے کرّہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

(12) ایک کھوکھلے استوانی پائپ کی لمبائی 40cm ہے۔اس کے اندرونی اور بیرونی نصف قطریں بالترتیب 4cm اور 12cm ہیں۔ اس کو پگھلا کر 20cm لمبائی کا ایک ٹھوس استوانہ میں ڈھالا جاتا ہے۔اس نئے ٹھوس استوانہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

(13) ایک لوہے کا قائم مدور مخروط جس کا قطر 8cm اور اونچائی 12cm ہے، پگھلا کر 4mm نصف قطر کے دھاتی چھرّوں میں ڈھالا جاتا ہے۔کتنے چھرّے بنائے جاسکتے ہیں ؟

(14) 12cm قطراور 15cm اونچائی رکھنے والا استوانہ آئس کریم سے بھرا ہوا ہے۔آئس کریم کو 12cm اونچے اور 6cm قطر کے مخروطوں میں بھرنا ہے جن کا اوپری حصّہ نصف کرّ وی ہے۔ بتاؤ دستیاب شدہ آئس کریم سے کتنے مخروطی آئس کریم حاصل ہوں گے؟

(15) ایک مستطیلی قاعدہ رکھنے والا برتن جس کی لمبائی 4.4m اور چوڑائی 2m ہے، برسات کے پانی کو جمع کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔برتن میں پانی کے سطح کی بلندی 4cm ہے۔اس پانی کو ایک استوانی برتن میں منتقل کیا جاتا ہے جس کا نصف قطر 20cm ہے۔استوانہ میں پانی کے سطح کی بلندی معلوم کرو۔

(16) ایک استوانی بالٹی(Bucket) جس کی اونچائی 32cm اورنصف قطر 18cm ہے،ریت سے بھری ہوئی ہے۔اس ریت کو زمین پر مخروطی ڈھیر کی شکل میں انڈیل دی جاتی ہے۔اگر مخروطی ڈھیر کی اونچائی 24cm ہوتو اس کا نصف قطر اور ترچھی بلندی معلوم کرو۔

(17) استوانی شکل کا ایک کنواں کھودا جاتا ہے جس کی گہرائی 20m اور قطر 14m ہے۔اس سے نکالی ہوئی مٹی کو ہموار کرکے ایک 20m × 14m کا چبوترہ (Platform) بنایا جاتا ہے۔چبوترہ کی اونچائی معلوم کرو۔

مشق 8.4

صحیح جواب کا انتخاب کرو۔

(1) 1cm نصف اور 1cm اونچے قائم مدوّر استوانے کا منحنی سطح کا رقبہ مساوی ہے۔

(A) π cm^2 (B) 2π cm^2 (C) 3π cm^3 (D) 2 cm^2

(2) قائم مدوّر استوانہ کا کل سطحی رقبہ جس کا نصف قطر، اس کی اونچائی h کا نصف ہے۔

(A) $\frac{3}{2}\pi h$ sq. units (B) $\frac{2}{3}\pi h^2$ sq. units (C) $\frac{3}{2}\pi h^2$ sq.units (D) $\frac{2}{3}\pi h$ sq.units

(3) قائم مدوّر استوانہ کے قاعدہ کا رقبہ 80cm² ہے۔اگر اونچائی 5cm ہوتو اس کا حجم ………… کے مساوی ہے۔

(A) 400 cm^3 (B) 16 cm^3 (C) 200 cm^3 (D) $\frac{400}{3}$ cm^3

(4) اگر ایک ٹھوس قائم مدور استوانے کا کل سطحی رقبہ 200π cm² اور اس کا نصف قطر 5cm ہوتو اس کے نصف قطر اور اونچائی کا حاصلِ جمع

(A) 20 cm (B) 25 cm (C) 30 cm (D) 15 cm

(5) ایک قائم مدوّر استوانہ جس کا نصف قطر a اکائی اور اونچائی b اکائی ہے، اس کا منحنی سطح کا رقبہ مساوی ہے

(A) $\pi a^2 b$ sqcm (B) $2\pi ab$ sq.cm (C) 2π sq.cm (D) 2 sq.cm

(6) ایک قائم مدور مخروط اور ایک قائم مدور استوانہ کا نصف قطر اور بلندی مساوی ہے۔اگر استوانہ کا حجم 120 cm³ ہوتو مخروط کا حجم

(A) 1200 cm^3 B) 360 cm^3 (C) 40 cm^3 (D) 90 cm^3

(7) ایک قائم مدوّر مخروط کا قطر اور اونچائی بالترتیب 12cm اور 8cm ہو تو اس کی ترچھی اونچائی

(A) 10 cm (B) 20 cm (C) 30 cm (D) 96 cm

(8) اگر ایک قائم مدوّر مخروط کے قاعدہ کا محیط اور بلندی بالترتیب 120πcm اور 10cm ہوں تو مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ

(A) 1200π cm^2 (B) 600π cm^2 (C) 300π cm^2 (D) 600 cm^2

(9) اگر ایک قائم مدوّر مخروط کا حجم 48π مکعب سمر اور قاعدہ کا رقبہ 12π مربع سمر ہو تو مخروط کی اونچائی

(A) 6 cm (B) 8 cm (C) 10 cm (D) 12 cm

(10) اگر ایک قائم مدور مخروط کی اونچائی 5cm اور قاعدہ کا رقبہ 48sq.cm ہو تو مخروط کا حجم مساوی ہے

(A) 240 cm^3 (B) 120 cm^3 (C) 80 cm^3 (D) 480 cm^3.

(11) دو استوانوں کی اونچائیوں اور نصف قطروں کی نسبت بالترتیب 1:2 اور 2:1 ہو تو ان کی حجموں کی نسبت

(A) 4 : 1 (B) 1 : 4 (C) 2 : 1 (D) 1 : 2

(12) اگر ایک کرّہ کا نصف قطر 2cm ہو تو اس کے منحنی سطح کا رقبہ

(A) 8π cm^2 (B) 16 cm^2 (C) 12π cm^2 (D) 16π cm^2.

(13) 2cm قطر کے نصف کرّہ کا کل سطحی رقبہ مساوی ہے۔

(A) 12 cm^2 (B) 12π cm^2 (C) 4π cm^2 (D) 3π cm^2.

(14) اگر ایک کرّہ کا حجم $\frac{9}{16}\pi$ مکعب سمر ہو تو اس کا نصف قطر مساوی ہے۔

(A) $\frac{4}{3}$ cm (B) $\frac{3}{4}$ cm (C) $\frac{3}{2}$ cm (D) $\frac{2}{3}$ cm.

(15) دو کرّوں کے سطحی رقبوں کی نسبت 9:25 ہو تو ان کے حجموں کی نسبت

(A) 81 : 625 (B) 729 : 15625 (C) 27 : 75 (D) 27 : 125.

(16) ایک ٹھوس نصف کرّہ کا کل سطحی رقبہ جس کا نصف قطر 'a' اکائی ہے، مساوی ہے

(A) $2\pi a^2$ sq.units (B) $3\pi a^2$ sq.units (C) $3\pi a$ sq.units (D) $3a^2$ sq.units.

(17) اگر ایک کرّہ کا سطحی رقبہ 100π مربع سمر ہو تو اس کا نصف قطر مساوی ہے

(A) 25 cm (B) 100 cm (C) 5 cm (D) 10 cm .

(18) اگر ایک کرّہ کا سطحی رقبہ 36 π مربع سمر ہو تو اس کا حجم مساوی ہے

(A) 12π cm^3 (B) 36π cm^3 (C) 72π cm^3 (D) 108π cm^3.

(19) اگر ایک ٹھوس نصف کرّہ کا کل سطحی رقبہ 12π مربع سمر ہو تو اس کے منحنی سطح کا رقبہ مساوی ہے

(A) 6π cm^2 (B) 24π cm^2 (C) 36π cm^2 (D) 8π cm^2.

(20) اگر ایک کرّہ کا نصف قطر دوسرے کرّے کے نصف قطر کا آدھا ہو تو ان کے حجموں کی نسبت

(A) 1 : 8 (B) 2: 1 (C) 1 : 2 (D) 8 : 1

(21) ایک ٹھوس کرہ کے منحنی سطح کا رقبہ 24 مربع سمر ہے۔ اگر اس کرہ کو دو نصف کروں میں تقسیم کیا جاتا ہے تو ایک نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ

(A) 12 cm^2 (B) 8 cm^2 (C) 16 cm^2 (D) 18 cm^2.

(22) دو قائم مدور مخروطوں کے نصف قطر مساوی ہیں۔ اگر ان کی ترچھی اونچائیاں 4:3 کی نسبت میں ہوں تو ان کے سطحی رقبوں کی نسبتیں

(A) 16 : 9 (B) 8 : 6 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

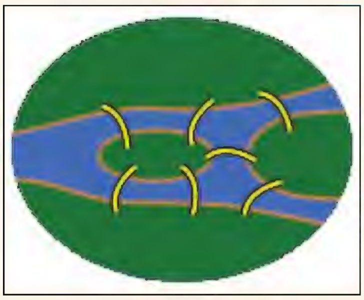
کیا تم جانتے ہو؟

کونگس برگ کے سات پُل علم ریاضیات میں ایک تاریخی مسئلہ بنے ہوئے ہیں۔ پرشیا (موجودہ کلننگراڈ، روس) میں واقع پرگل ندی کے دونوں جانب جس میں دو جزیرے واقع ہیں، اُن کے اور دیگر زمینی حصوں کو ملانے کے لئے سات پُل بنائے گئے ہیں۔ (تصویر دیکھئے)۔

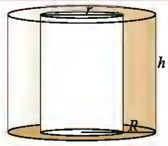
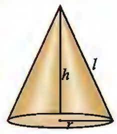
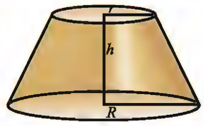
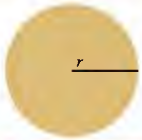
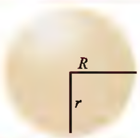
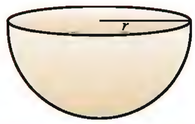
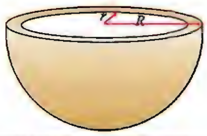
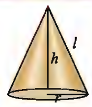
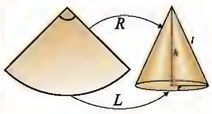
مسئلہ یہ ہے کہ شہر سے ایک ایسا راستہ اختیار کرنا ہے جو ایک پُل سے صرف ایک ہی بار گزرے۔ جزیروں کو پُلوں کے علاوہ دیگر راستوں سے بھی نہ گزریں اور ہر بار پُل پار کریں (پُل کے ایک جانب سے آدھا حصہ جا کر واپس نہ آئے اور دوسری بار پُل کے دوسری جانب آدھا حصہ بھی پار نہ کرے)۔

لیون ہارڈ یولر نے 1735 ہی میں یہ ثابت کر دیا کہ اس مسئلہ کا کوئی حل نہیں ہے۔ یولر کا یہ منفی حل ترسیمی نظریہ اور کسی مقام کے جغرافیائی نقشہ بنانے کی بنیاد بنا۔

$\Longleftrightarrow$



یاد رکھنے کے نکات

شمار عدد	نام	خاکہ	منحنی سطح کا رقبہ (مربع اکائیاں)	کل سطحی رقبہ (مربع اکائیاں)	حجم (مکعب اکائیاں)
1	ٹھوس قائم مدور استوانہ		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	$\pi r^2 h$
2	ٹھوس قائم کھوکھلا استوانہ		$2\pi h(R+r)$	$2\pi(R+r)(R-r+h)$	استعمال شدہ شئے کا حجم $\pi R^2 h - \pi r^2 h$ $= \pi h(R^2-r^2)$ $= \pi h(R+r)(R-r)$
3	ٹھوس قائم مدور مخروط		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
4	مخروط کا مقطوعہ		--------	---------------	$\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$
5	کرّہ		$4\pi r^2$	---------------	$\frac{4}{3}\pi r^3$
6	کھوکھلا کرّہ		--------	---------------	استعمال شدہ شئے کا حجم $\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$
7	ٹھوس نصف کرّہ		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
8	کھوکھلا نصف کرّہ		$2\pi(R^2+r^2)$	$2\pi(R^2+r^2)+\pi(R^2-r^2)$ $= \pi(3R^2+r^2)$	استعمال شدہ شئے کا حجم $\frac{2}{3}\pi(R^3-r^3)$
9	ایک قطاع دائرہ مخروط میں تبدیل کیا گیا ہو۔ مخروط کا CSA = قطاع دائرہ کا رقبہ $\pi rl = \frac{\theta}{360}\times\pi r^2$ قطاع دائرہ کی لمبائی = مخروط کے قاعدہ کا محیط		$l = \sqrt{h^2+r^2}$ $h = \sqrt{l^2-r^2}$ $r = \sqrt{l^2-h^2}$ 	10- ایک پائپ کے ذریعہ پانی کا بہاؤ = { وقت × رفتار × عمودی تراش کا رقبہ } 11- پگھلا کر نئے حاصل کردہ ٹھوس اشیاء $= \frac{\text{پگھلائے جانے والے ٹھوس کا حجم}}{\text{بنائے جانے والے ٹھوس کا حجم}}$	
12	تبدیلیاں	$1\ m^3 = 1000$ litres , $1\ d.m^3 = 1$ litre , $1000\ cm^3 = 1$ litre , 1000 litres = 1 *kl*			

9

عملی علمِ ہندسہ
PRACTICAL GEOMETRY

Give me a place to stand, and I shall move the earth
-Archimedes

- تمہید
- مماسیں
- مثلثیں
- چارضلعیاں

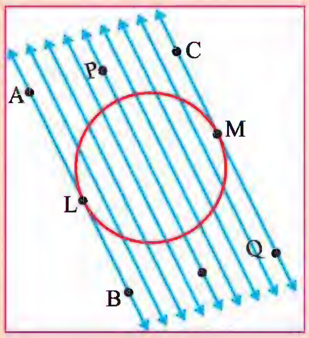
9.1 تمہید

علم ہندسہ کا وجود 3000 قبل مسیح میں مصر میں ہوا۔ جسے وہ زمین کی پیمائش کے لئے استعمال کرتے تھے۔ ابتدا میں علم ہندسہ لمبائیاں ، زوایے ، رقبے ، اور حجم کو معلوم کرنے اور ان کے اصولوں کو استعمال کر کے کسی مقام کا جائزہ لینے، تعمیراتی کاموں، فلکیات اور دیگر فنون کے لئے استعمال کیا گیا۔

موجودہ دور میں اس میں کئی ترمیمات کرنے سے اس کے دیگر شعبے جیسے الجبرا، تجزیاتی علم ہندسہ وغیرہ اس کے آگے کم مقام رکھنے لگے۔ مگر کئی ریاضی دان اس بات کو نہیں مانتے۔ دراصل علم ہندسہ کئی ریاضی تصورات کو سمجھنے میں بہت معاون و مددگار ہے۔ اس باب میں ہم دی گئی حقیقی پیمائشوں کی مدد سے دائروں پر مماسوں کی تصنیف، مثلثوں اور مدور چارضلعیوں کی تصنیف سیکھیں گے۔

نویں جماعت میں ہم نے دائرے سے متعلق کئی اصطلاحات جیسے وتر، قطاع خط، قطاع دائرہ وغیرہ کے بارے میں معلومات حاصل کی تھیں۔ آیئے اب ہم بعض اصطلاحات جیسے خط قاطع (secant)، دائرے پر مماس وغیرہ کے بارے میں درج ذیل کارروائیوں کی مدد سے سیکھیں گے۔

کارروائی



ایک کاغذ پر کسی بھی نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیں۔ اور دائرے پر خط قاطع (secant) PQ کھینچیں۔ PQ کے دونوں جانب PQ کے متوازی جتنے ہوسکیں، اتنے خط قاطع کھینچیں۔ غور کیجئے کہ خط قاطع کے دونوں جانب کے نقطۂ تقاطع قریب تر ہوتے جاتے ہیں۔

برہما گپتا
(598 - 668AD)
(قدیم ہندوستان کے عظیم سائنس دان)

برہما گپتا نے ''برہما سپتا سِدھانتا'' نامی ایک کتاب لکھی۔ علم ہندسہ میں ان کا کارنامہ مدور چارضلعی کے رقبہ کا ضابطہ معلوم کرنا ہے۔

p, q, r اور s ضلعے رکھنے والے کسی بھی مدور چارضلعی کو اس نے ایک تقریبی قیمت دی اور رقبہ معلوم کرنے کا ایک درست ضابطہ پیش کیا۔ تقریبی رقبہ اس طرح ہے۔

$$\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$$

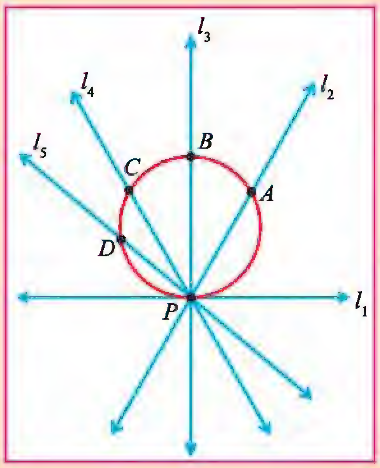
درست رقبہ اس طرح ہے۔

$$\text{رقبہ} = \sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$$

جس میں $2t = p + q + r + s$

تم یہ بھی غور کرو گے کہ ایک ایسا نقطہ آئے گا جہاں پر PQ سے متوازی خط کے دو نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں گے۔ PQ کے متوازی خط قاطع میں خطوط مستقیم AB اور CD دائرے کے ایک نقطہ پر فرض کریں کہ L اور M پر دائرہ کو مس کریں گے۔ AB اور CD خطوط اس دائرے پر L اور M پر بننے والے **مماس** کہلائیں گے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ AB کے متوازی CD ہے۔

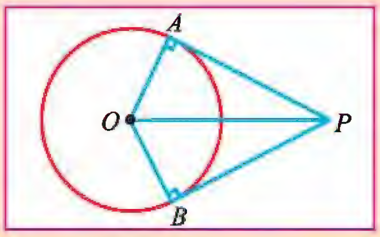
کارروائی



ایک دائرہ بنائیے اور اس میں ایک نقطہ P لیجئے۔ P سے کئی خطوط کھینچئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔ وہ خطوط مستقیم جو P سے گزرتے ہیں، دائرے پر دو نقطہ تقاطع رکھتے ہیں۔ خطوط مستقیم l_2, l_3, l_4 اور l_5 دائرے پر C, B, A اور D پر ملتے ہیں۔ یہ خطوط l_2 , l_3 , l_4 , l_5 دائرے کے قطاع خط ہیں۔ مگر l_1 خط دائرے پر ٹھیک ایک نقطہ P کو مس کرتا ہے۔ اس l_1 خط کو P پر دائرے کا **مماس** کہتے ہیں۔

ہمیں معلوم ہے کہ دائرے کے نصف قطر سے نقطہ تقاطع پر بنایا گیا عمود اس نقطہ پر مماس ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ A پر AP ایک مماس ہے جو ایک بیرونی نقطہ P تک دراز کیا گیا ہے۔



مثلثِ قائمۃ الزاویہ ΔOPA میں $OA \perp AP$,

[مسئلۂ فیثاغورث کے تحت] $$OP^2 = OA^2 + AP^2$$

$$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2}$$

9.2 دائروں پر مماسوں کی تصنیف :

کسی دائرہ پر مماس کی تصنیف کس طرح کی جاتی ہے، اس کے بارے میں ہم سیکھیں گے۔

(i) مرکز کو استعمال کر کے

(ii) مسئلۂ مماس-وتر کو استعمال کر کے

9.2.1 کسی دائرہ پر مماس کی تصنیف (مرکز کو استعمال کر کے)

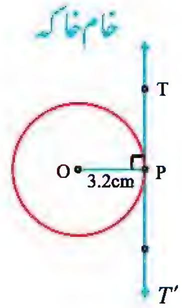
نتیجہ

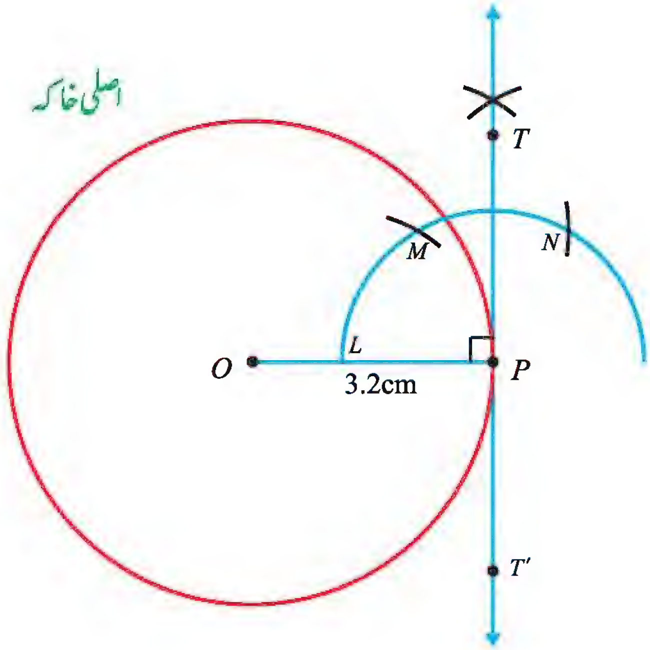
کسی دائرہ میں نصف قطر سے نقطہ تقاطع تک ملایا گیا خط، اس نقطہ پر مماس کے عمود میں ہوگا۔

مثال 9.1

3.2 سمر نصف قطر والا ایک دائرہ بنائیے۔ دائرہ پر ایک نقطہ P لیجئے اور P پر ایک مماس بنائیے۔ (مرکز کو استعمال کر کے)

دیا گیا ہے　　　دائرہ کا نصف قطر = 3.2 سم





تصنیف :

(i)　O کو مرکز مان کر اور 3.2 سم نصف قطر لیکر ایک دائرہ بنائیے۔

(ii)　دائرہ پر ایک نقطہ P لیجئے اور OP کو ملائیے۔

(iii)　P کو مرکز مان کر اس قوس کاٹئے جو OP کو L پر قطع کرے۔

(iv)　قوس پر M اور N اس طرح نشان کیجئے کہ $\overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MN}$ ہو۔

(v)　$\angle MPN$ کا ناصف PT کھینچئے۔

(vi)　TP سے T' تک دراز کیجئے۔ درکار مماس $T'PT$ حاصل ہوا۔

برائے ذہن نشینی

دائرے کے ایک نقطہ P سے بنے خط مستقیم OP کے عمود میں PT ایک عمودی خط کھینچا جاسکتا ہے۔ یہاں پر PT ہی نقطہ P پر دائرہ کا مماس ہے۔

9.2.2　مماس-وتر کے مسئلہ کی مدد سے مماسوں کی تصنیف

نتیجہ　مماس وتر کا مسئلہ

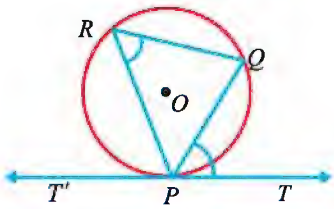
کسی دائرے کا وتر اور ایک کنارے کے مماس کے وتر کا زاویہ دائرے کے متبادل خط قاطع کے وتر پر بننے والے زاویہ کے مساوی ہوگا۔

مثال 9.2

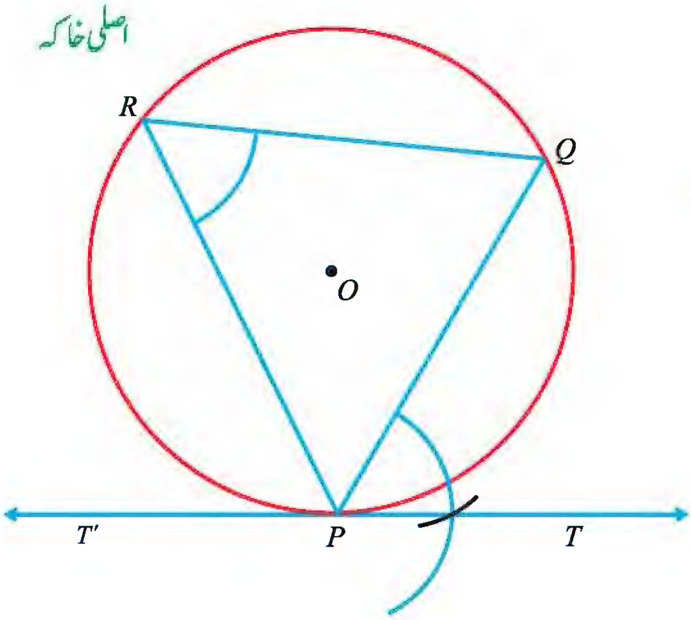
3.2 سمر نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔ اس پر ایک نقطہ P لیجئے۔ مماس وتر کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے دائرہ پر ایک مماس بنائیے۔

دیا گیا ہے : دائرے کا نصف قطر 3.2 سمر

خام خاکہ



اصلی خاکہ



تصنیف :

(i) O کو مرکز مان کر 3.2 سمر نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

(ii) دائرے پر ایک نقطہ P لیجئے۔

(iii) P کے ذریعے ایک وتر PQ کھینچئے۔

(iv) P اور Q سے ایک نقطہ R اس طرح نشان کیجئے Q, P اور Rدائرے پر غیر ساعت وار سمت (Counter clockwise direction) میں ہوں۔

(v) PR اور QR کو ملائیے۔

(vi) P پر اس طرح بنائیے کہ $\angle QPT = \angle PRQ$

(vii) TP سے T' تک دراز کرنے پر ہمیں مطلوبہ خطِ مماس $T'PT$ حاصل ہوتا ہے۔

9.2.3 دائرے کے ایک بیرونی نقطہ سے مماس کی ایک جوڑی کی تصنیف

نتیجہ

(i) دائرے کے ایک بیرونی نقطہ سے دو مماسیں بنائی جا سکتی ہیں۔

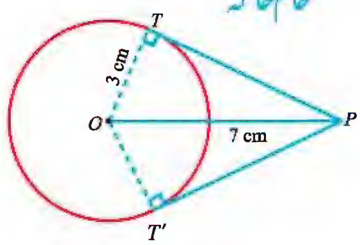
(ii) دائرے کے محیط پر قطر 90° ہوگا۔

مثال 9.3 :

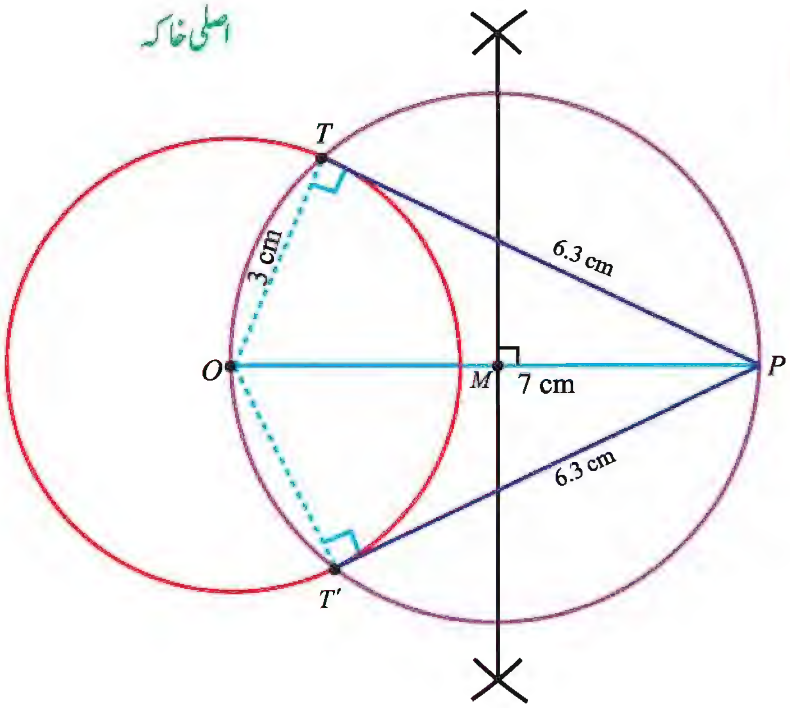
3 سمر نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچئے۔ اسکے مرکز سے 7 سمر کے فاصلے پر دائرے پر دو مماسیں کھینچئے۔ اور مماسوں کے طول ناپئے۔

دیا گیا ہے : دائرے کا نصف قطر 3 سمر

خام خاکہ



اصلی خاکہ



تعنیف :

(i) 3 سمر نصف قطر والا ایک دائرے بنایئے اور اس کے مرکز پر O نشان کیجئے۔

(ii) مرکز O سے 7 سمر کے فاصلے پر ایک نقطہ P نشان کیجئے اور OP کو ملایئے۔

(iii) OP پر عمودی ناصف بنایئے۔ OP کو M پر ملنے دیجئے۔

(iv) M کو مرکز مان کر MO کو نصف قطر مان کر ایک اور دائرہ بنایئے۔

(v) دونوں دائروں کو T اور T' پر قطع کرنے دیجئے۔

(vi) PT اور PT' کو ملایئے۔ یہ مطلوبہ مماسیں ہیں۔

مماس کا طول PT = 6.3cm

جانچ :

قائمۃ الزاویہ Δ OPT میں

$$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40}$$

PT = 6.3 سمر (تقریباً)

مشق 9.1

1) 4.2 سمر نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچیے۔ اس پر ایک نقطہ لیجیے۔ مرکز کو استعمال کرتے ہوئے مماس بنائیے۔

2) 4.8 سمر نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔ اس پر ایک نقطہ لیجیے۔ مماس-وتر کا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے مماس تصنیف کیجئے۔

3) 10 سمر قطر کا ایک دائرہ کھینچیے۔دائرے کے مرکز سے 13 سمر کے فاصلے پر ایک نقطہ P لیجیے۔اور دائرے کو دو مماسیں PA اور PB کھینچیے۔ مماسوں کا طول ناپیے۔

4) ایک نقطہ سے دو مماسیں بنائیے جو 6 سمر نصف قطر کے ایک دائرے کے مرکز سے 10 سمر کے فاصلے پر ہے۔مماسوں کے طول کی پیمائش کیجئے۔

5) 3 سمر نصف قطر کے دائرے کے مرکز سے 9 سمر کے فاصلے پر ایک نقطہ لیجیے۔اور اس نقطہ سے دائرے پر دو مماسیں بنائیے۔

9.3 مثلثوں کی تصنیف :

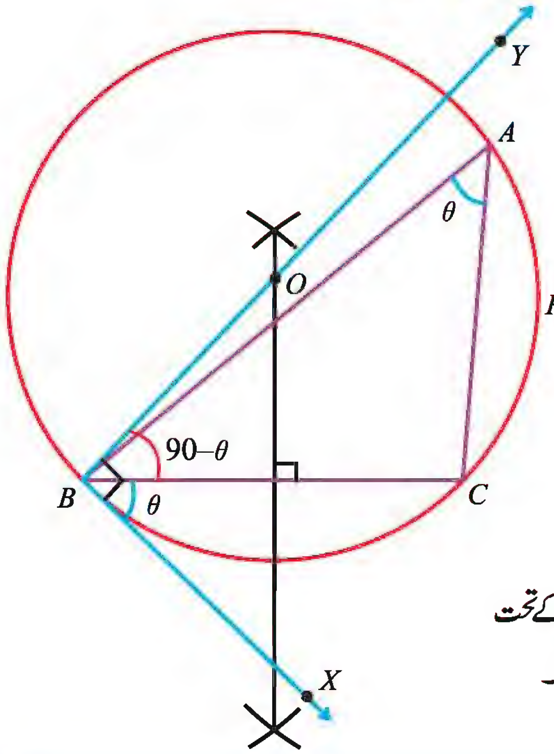
ہم نے ضلعے اور زاویہ کی مدد سے مثلثوں کی تصنیف کے بارے میں پہلے ہی پڑھا ہے۔ اس باب میں ہم مثلثوں کی تصنیف کے بارے میں پڑھیں گے جب اس کا

(i) قاعدہ، عمودی زاویہ اور راس سے بننے والا عمود دیا گیا ہو۔

(ii) قاعدہ، عمودی زاویہ، اور وسطانیہ دیا گیا ہو۔

سب سے پہلے ہم دئے گئے خط اور زاویہ سے دائرہ کا خط قاطع بنانے کا طریقہ سیکھیں گے۔

دئے گئے ایک قطاع خط جس میں ایک زاویہ θ ہو اس سے دائرے کے خط قاطع کی تصنیف



تصنیف :

(i) ایک قطاع خط $\overline{BC}$ کھینچیے۔

(ii) B پر زاویہ $\angle CBX = \theta$ بنائیے۔

(iii) $BY \perp BX$ کھینچیے۔

(iv) BC کا عمودی ناصف کھینچیے جو BY کو O پر قطع کرے۔

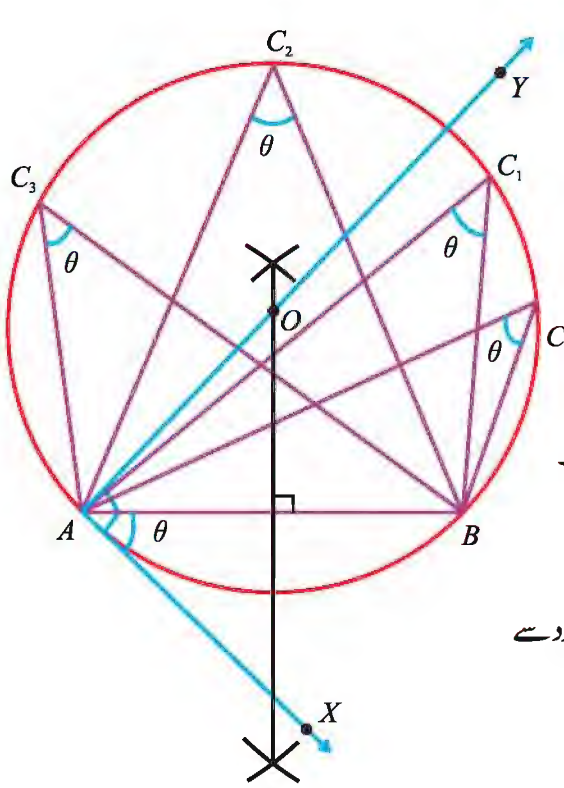
(v) O کو مرکز مان کر OB کو نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) دائرے کے محیط پر کہیں بھی ایک نقطہ A لیجیے۔مسلۂ مماس-وتر کے تحت قوس کبیر BAC ہی مطلوبہ قطاع خط ہے جس میں θ واقع ہے۔

قاعدہ اور عمودی زاویہ دیا گیا ہو تو اس سے ایک مثلث کی تصنیف :

اگر قاعدہ اور عمودی زاویہ دیا گیا ہو تو مثلث کی تصنیف کے دوران کے مرحلوں کی وضاحت کریں گے۔

تصنیف :



(i) ایک قطاع خط AB کھینچئے۔

(ii) A پر زاویہ $\angle BAX = \theta$ بنائیے۔

(iii) $AY \perp AX$ کھینچئے۔

(iv) AB کا عمودی ناصف کھینچئے جو AY کو "O" پر کاٹے۔

(v) "O" کو مرکز مان کر OA نصف قطر لیکر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) متبادل قطاع خط پر ایک نقطہ C لیجئے۔ AC اور BC کو ملائیے۔

(vii) ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

اب ہم آسانی کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ دیے گئے قاعدے اور عمودی زاویہ کی مدد سے بنائے گئے مثلثوں میں سے ایک مثلث ΔABC ہے۔

غور کیجئے کہ

$AX \perp AY$ تو $\angle XAY = 90°$

(دائرے کے نصف قطریں) $OB = OA$ ہے۔

AX دائرے کا مماس ہے A اور C دائرے پر کے نقاط ہیں۔

(مماس-وتر کے مسئلہ سے) $\angle BAX = \angle ACB$

برائے ذہن نشینی

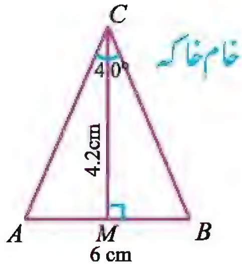
اگر $C_1, C_2, C_3, \ldots$ دائرے کے نقاط ہیں تو تمام مثلثوں $\Delta ABC_1, \Delta ABC_2, \Delta ABC_3 \ldots$ کے قاعدے اور عمودی زاویے مساوی ہوں گے۔

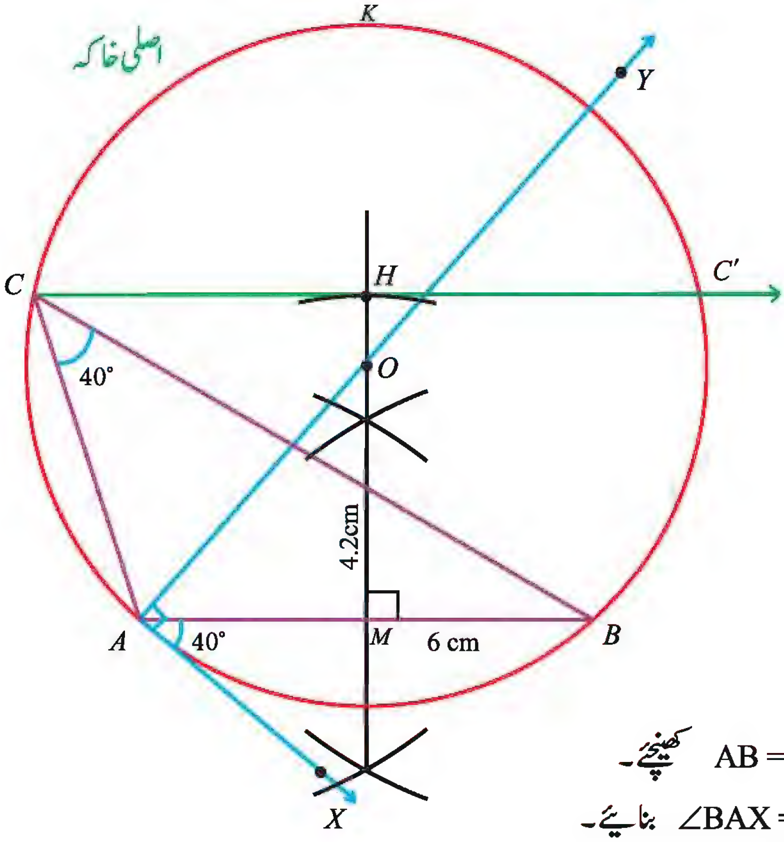
9.3.1 اگر قاعدہ، عمودی زاویہ اور راس سے قاعدے پر ارتفاع دیا گیا ہو تو مثلثوں کی تصنیف

مثال 9.4 :

ایک مثلث ABC اس طرح تصنیف کیجیے کہ AB = 6 سمر ، $\angle C = 40^\circ$ اور C سے AB کے ارتفاع کی لمبائی 4.2 سمر ہے۔

دیا گیا ہے : ΔABC میں $\angle C = 40^\circ$ ؛ AB = 6 سمر ، C سے AB کے ارتفاع کی لمبائی = 4.2 سمر





تصنیف :

(i) ایک قطاع خط AB = 6 سمر کھینچیے۔

(ii) AX پر زاویہ $\angle BAX = 40^\circ$ بنائیے۔

(iii) $AY \perp AX$ کھینچیے۔

(iv) AB کا عمودی ناصف کھینچیے جو AY کو "O" پر کاٹے اور AB کو M پر کاٹے۔

(v) "O" کو مرکز مان کر OA نصف قطر لیکر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) اس قطاع خط AKB کا عمودی زاویہ 40° ہے۔

(vii) عمودی ناصف MO پر ایک نقطہ "H" اس طرح نشان کیجیے کہ MH = 4.2 سمر ہے۔

(viii) AB کے متوازی CHC' کھینچیے، جو دائرے C اور C' پر کاٹے۔

(ix) ΔABC کو مکمل کیجیے جو ایک مطلوبہ مثلثوں میں ایک مثلث ہے۔

برائے ذہن نشینی

$\Delta ABC'$ بھی ایک اور مطلوبہ مثلث ہے۔

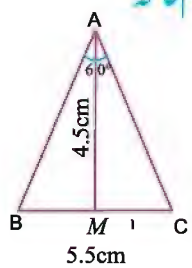
9.3.2 قاعدہ، عمودی زاویہ اور قاعدے پر خطِ وسطی دیا گیا ہو تو مثلث کی تصنیف

مثال 9.5 :

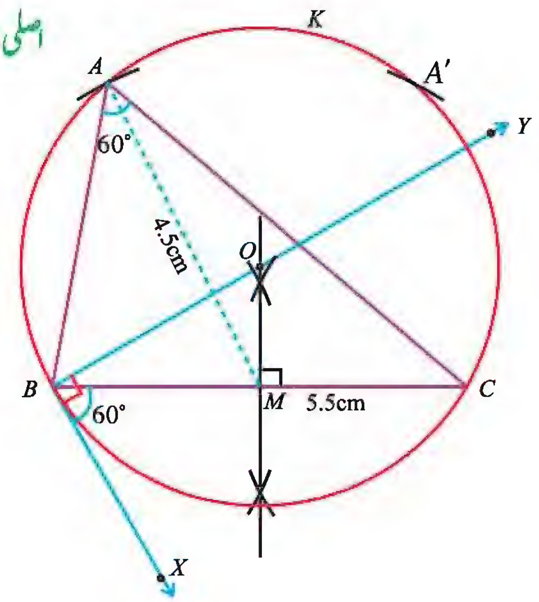
مثلث ABC تصنیف کیجئے، جسمیں $BC = 5.5$ سم ; $\angle A = 60^\circ$ اور راس سے خطِ وسطی $AM = 4.5$ سم ہو۔

دیا گیا ہے۔ مثلث ABC میں $AM = 4.5$ سم خطِ وسطی $\angle A = 60^\circ$ ، $BC = 5.5$ سم

خام خاکہ



اصلی خاکہ



تصنیف :

(i) ایک قطاع خط $BC = 5.5$ سم کھینچیے۔

(ii) B پر BX اس طرح بنائیے کہ $\angle CBX = 60^\circ$ ہو۔

(iii) $BX \perp BY$ کھینچیے۔

(iv) BC کا عمودی ناصف کھینچیے جو BY کو 'O' پر اور BC کو M پر کاٹے۔

(v) O کو مرکز مان کر OB نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) قوس کبیر BKC میں 60° زاویہ واقع ہے۔

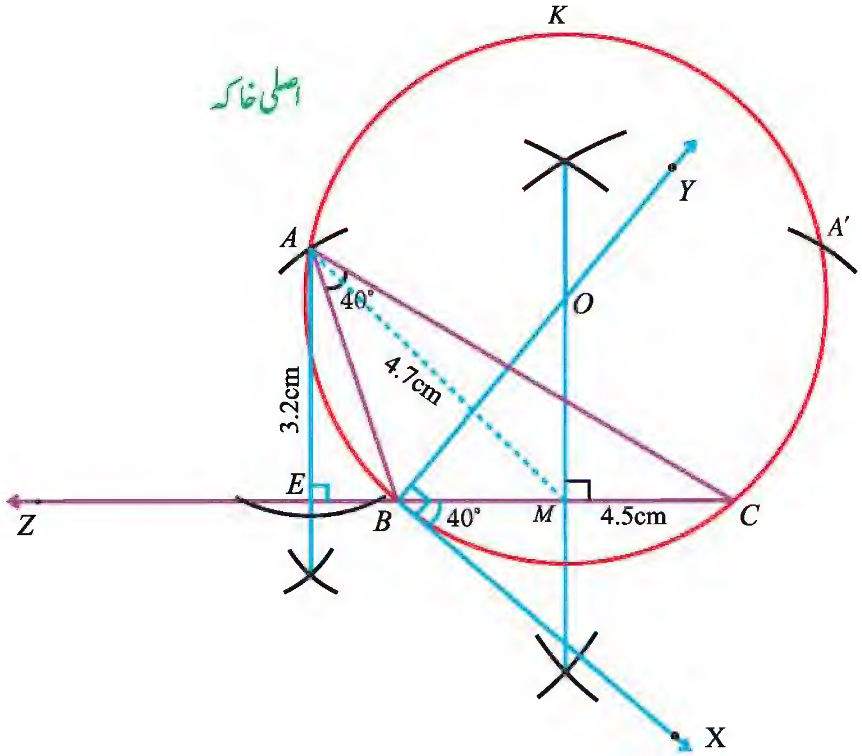
(vii) M کو مرکز مان کر 4.5 سم نصف قطر لے کر دائرے پر دو قوسیں A اور A' بنائیے۔

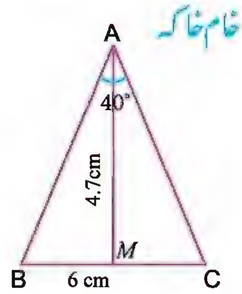
(viii) ΔABC یا $\Delta A'BC$ مطلوبہ مثلث ہے۔

مثال 9.6 :

ایک مثلث ABC تصنیف کیجئے جس میں $BC = 4.5$ سمر ، $\angle A = 40°$ اور جس میں A سے BC کا خطِ وسطی 4.7 سمر ہے تو A سے BC کا ارتفاع معلوم کیجئے۔

دیا گیا ہے : مثلث ABC میں $BC = 4.5$ سمر ؛ $\angle A = 40°$ ؛ A سے BC کا خطِ وسطی $AM = 4.7$ سمر





تصنیف :

(i) ایک قطاع خط $BC = 4.5$ سمر کھینچئے۔

(ii) BX پر زاویہ $\angle CBX = 40°$ بنائیے۔

(iii) $BY \perp BX$ کھینچئے۔

(iv) BC کا عمود عاناصف کھینچئے جو BY کو $'O'$ پر اور BC کو M پر کاٹے۔

(v) O کو مرکز مان کر OB نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) قوس کبیر BKC میں زاویہ $40°$ واقع ہے۔

(vii) M کو مرکز مان کر 4.7 سمر نصف قطر لے کر دائرے پر دو قوسیں کاٹیں جو دائرہ کو A اور A' پر ملیں۔

(viii) ΔABC اور $\Delta A'BC$ کو مکمل کیجئے۔ یہی مطلوبہ مثلث ہے۔

(ix) CB کو CZ تک دراز کیجئے۔

(x) $AE \perp CZ$ کھینچئے۔

(xi) عمود کی لمبائی $AE = 3.2$ سمر ہے۔

مشق 9.2

(1 ایک خط پر ایک دائرے کا قطاع خط بنائیے۔ جس میں $AB = 5.2$ سمر اور $48°$ زاویہ ہو۔

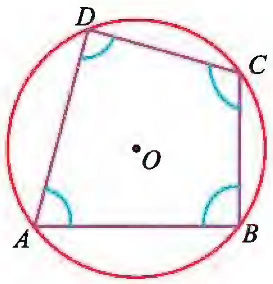
(2 ایک مثلث PQR تصنیف کیجئے جس میں قاعدہ $PQ = 6$ سمر ؛ $\angle R = 60°$ اور R سے PQ کا ارتفاع 4 سمر ہے۔

(3 ایک مثلث PQR تصنیف کیجئے۔ جس میں $PQ = 4$ سمر ; $\angle R = 60°$ اور R سے PQ کا ارتفاع 4.5 سمر ہے۔

(4 ایک مثلث ABC تصنیف کیجئے جس میں قاعدہ $BC = 5$ سمر؛ $\angle BAC = 40°$ اور A سے وسطی خط BC کی لمبائی 4 سمر ہے۔

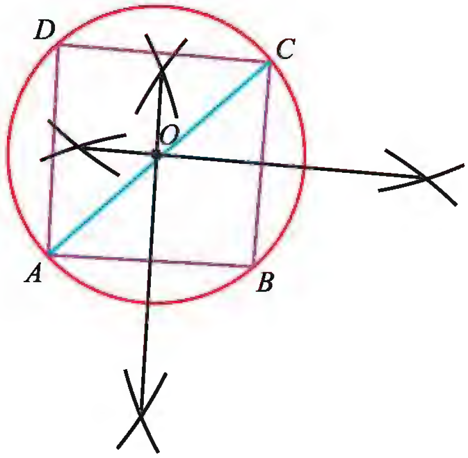
(5 مثلث ABC تصنیف کیجئے جس میں قاعدہ $BC = 5$ سمر؛ $\angle BAC = 40°$ اور A سے BC تک کے وسطی خط کی لمبائی 6 سمر ہے۔ اور A سے عمود کی لمبائی کی پیمائش بھی کیجئے۔

9.4 مدور چار ضلعی (مدور ذواربعۃ الاضلاع) کی تصنیف



کسی چار ضلعی کے چاروں راس ایک دائرے پر واقع ہوں تو اسے مدور چار ضلعی کہتے ہیں۔ کسی چار ضلعی کے مقابل کے زاویے مکملہ (Supplementary) ہوتے ہیں۔ یعنی مقابل کے زاویوں کا حاصل جمع $180°$ ہوتا ہے۔ لہٰذا کسی مدور چار ضلعی کی تصنیف کے لئے چار مناسب پیمائشیں (پانچ پیمائشوں کی بجائے) کافی ہیں۔

جب درکار پیمائشیں دی گئی ہوں تو ایک مدور چار ضلعی کی تصنیف کے مرحلے بتائے گئے ہیں۔



(i) پہلے ایک خام خاکہ کھینچئے۔ دی گئی پیمائشوں کی مدد سے ΔABC یا ΔABD بنائیے۔

(ii) AB اور BC کے عمودی ناصف کھینچئے۔ جو ایک دوسرے کو نقطہ 'O' پر کاٹیں۔ (ΔABC کے کوئی دو ضلعے لے سکتے ہیں)

(iii) O کو مرکز مان کر OA نصف قطر لے کر مثلث ABC کا ایک حائط دائرہ بنائیے۔

(iv) دی گئی پیمائشوں کی مدد سے چوتھا راس D معلوم کیجئے اور AD اور CD کو ملائیے۔

(v) اب $ABCD$ مطلوبہ مدّور چار ضلعی ہے۔

اس باب میں ہم دئے گئے مختلف پیمائشوں کی مدد سے مطلوبہ مدّور چار ضلعیوں کی تصنیف کریں گے۔

(i) تین ضلعے اور ایک وتر (ii) دو ضلعے اور دو وتر (iii) تین ضلع اور ایک زاویہ

(iv) دو ضلعے اور دو زاویے (v) ایک ضلعے اور تین زاویے (vi) دو ضلعے، ایک زاویے اور ایک متوازی خط۔

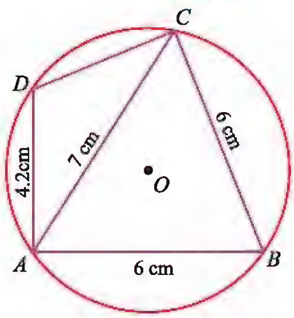
قسم I : اگر تین ضلعے اور ایک وتر دیے گئے ہوں تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال 9.7

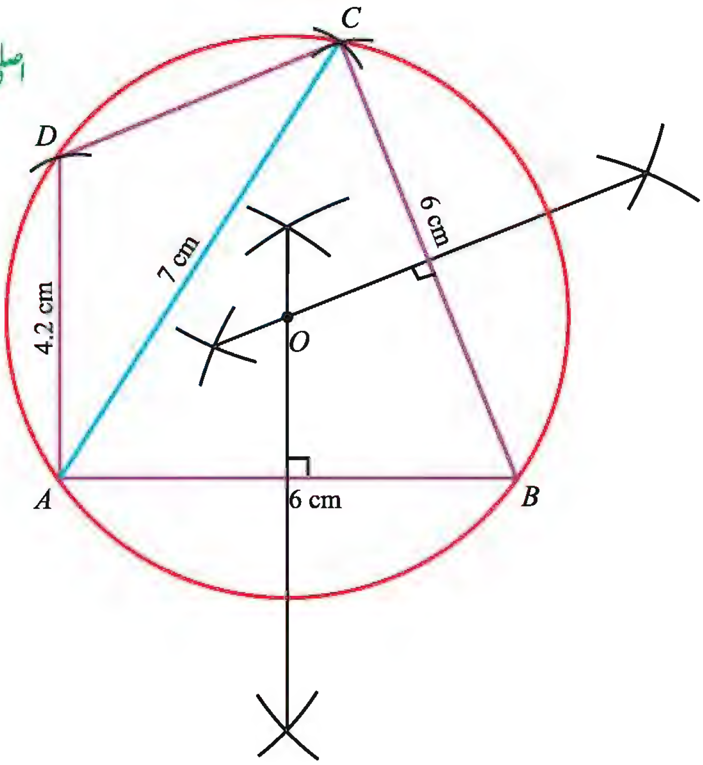
ایک مدوّر چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے۔ جس میں $AB = 6$ سمر، $AC = 7$ سمر، $BC = 6$ سمر اور $AD = 4.2$ سمر ہوں۔

دیا گیا ہے : مدور چار ضلعی $ABCD$ میں $AB = 6$ سمر، $AC = 7$ سمر، $BC = 6$ سمر، $AD = 4.2$ سمر

خام خاکہ



اصلی خاکہ



تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنائیے اور اس میں پیمائشیں درج کیجئے۔ ایک قطاع خط $AB=6$ سمر کھینچئے۔

(ii) A کو مرکز مان کر 7 سمر نصف قطر اور B کو مرکز مان کر 6.5 سمر نصف قطر لے کر دو قوسیں کاٹئے۔ دونوں کے ملنے کے مقام کو C نام دیجئے۔

(iii) AB اور AC کا عمودی ناصف کھینچئے جو O پر کاٹیں۔

(iv) O کو مرکز مان کر OA $(OB = OC)$ نصف قطر لے کر مثلث ABC پر ایک حائط دائرہ بنائیں۔

(v) دائرے پر A کو مرکز مان کر 4.2 سمر کا قوس کاٹئے، جو D پر قطع کرے۔

(vi) AD اور CD کو ملائیے۔

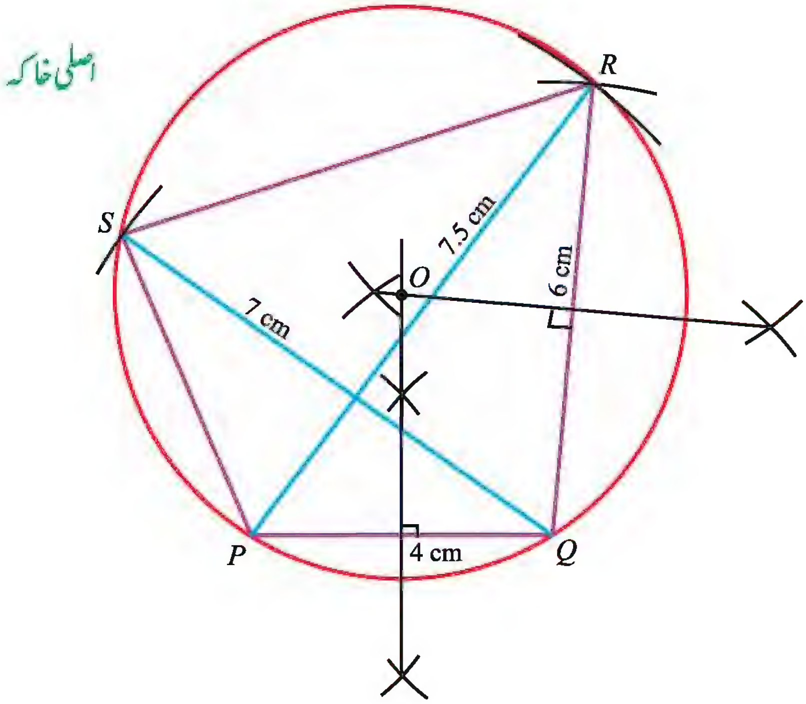
اب، $ABCD$ ایک مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

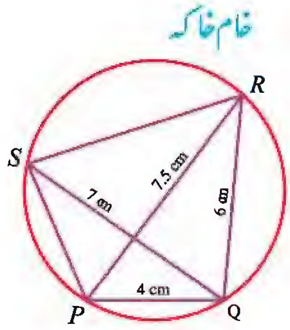
قسم II : دو ضلعے اور دو وتریں دیے گئے ہوں تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال 9.8 :

ایک مدور چار ضلعی $PQRS$ تصنیف کیجیے۔ جس میں $PQ = 4$ سمر ، $QR = 6$ سمر ، $PR = 7.5$ سمر اور $QS = 7$ سمر ہوں۔

دیا گیا ہے : $PQ = 4$ سمر ، $QR = 6$ سمر ، $PR = 7.5$ سمر اور $QS = 7$ سمر





تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنائیے اور اس میں پیمائشیں درج کیجیے۔ ایک قطاع خط $PQ = 4$ سمر کھینچیے۔

(ii) P کو مرکز مان کر 7.5 سمر نصف قطر لے کر ایک قوس کاٹیے۔

(iii) Q کو مرکز مان کر 6 سمر نصف قطر کا ایک اور قوس کاٹیے جو پہلے قوس کو R پر کاٹے۔

(iv) PR اور QR کو ملائیں۔

(v) PQ اور QR کا عمودی ناصف کھینچیے جو ایک دوسرے کو O پر کاٹیں۔

(vi) O کو مرکز مان کر ($OP = OQ = OR$) نصف قطر لے کر مثلث PQR پر حائط دائرہ بنائیے۔

(vii) Q کو مرکز مان کر 7 سمر نصف قطر لے کر ایک قوس کاٹیے جو دائرے کے محیط پر کاٹے۔ اسے S نام دیجیے۔

(viii) PS اور RS کو ملائیے۔

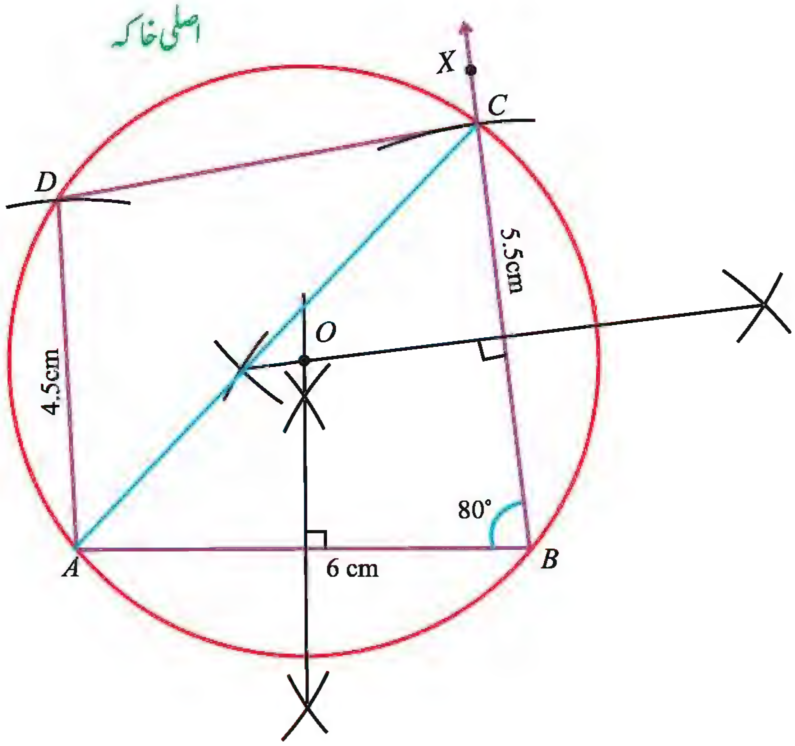
(ix) اب، $PQRS$ مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

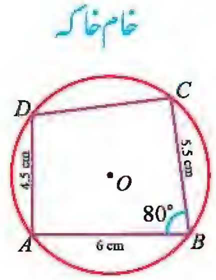
قِسم III : تین ضلعے اور ایک زاویہ دیا گیا ہو تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال : 9.9

ایک مدور چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے۔ جس میں $AB = 6$ سمر ، $BC = 5.5$ سمر ، $\angle ABC = 80^\circ$ اور $AD = 4.5$ سمر ہوں۔

دیا گیا ہے : $AB = 6$ سمر ، $BC = 5.5$ سمر ، $\angle ABC = 80^\circ$ اور $AD = 4.5$ سمر





تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنایئے اور اس میں پیمائشیں درج کیجئے۔ ایک قطاع خط $AB = 6$ سمر کھینچئے۔

(ii) B سے BX اس طرح کھینچئے کہ $\angle ABX = 80^\circ$ ہو۔

(iii) B کو مرکز مان کر 5.5 سمر کا ایک اور قوس کاٹئے جو BX کو C پر کاٹے۔ AC کو ملایئے۔

(iv) AB اور BC کا عمودی ناصف کھینچئے جو ایک دوسرے کو O پر کاٹیں۔

(v) O کو مرکز مان کر $OA (=OB = OC)$ نصف قطر لے کر مثلث ABC پر حائط دائرہ بنایئے۔

(vi) A کو مرکز مان کر 4.5 سمر نصف قطر لے کر ایک قوس کاٹئے جو دائرے کے محیط پر کاٹے۔ اسے D نام دیجئے۔

(vii) AD اور CD کو ملایئے۔

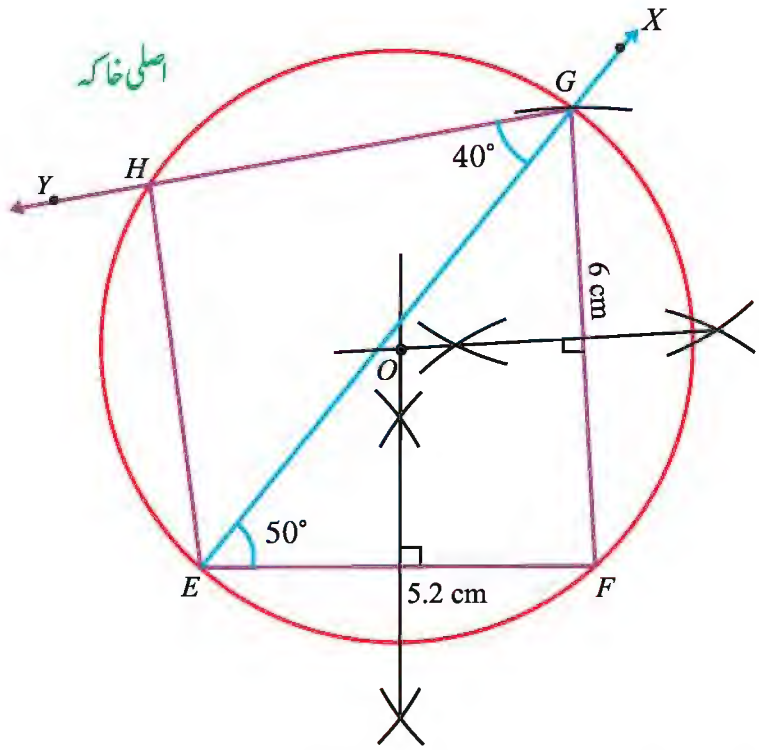
(viii) اب، $ABCD$ مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

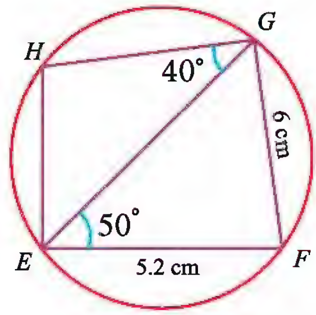
قسم IV : دو ضلعے اور دو زاویے دیے گئے ہوں تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال 9.10 :

ایک مدور چار ضلعی $EFGH$ تصنیف کیجئے۔ جس میں $EF = 5.2$ سمر ، $\angle GEF = 50°$ ، $FG = 6$ سمر اور $\angle EGH = 40°$ ہو۔

دیا گیا ہے : $EF = 5.2$ سمر ، $\angle GEF = 50°$ ، $FG = 6$ سمر اور $\angle EGH = 40°$





تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنائیے اور اس میں پیمائشیں نشان کیجئے۔ $EF = 5.2$ سمر کا قطاع خط کھینچئے۔

(ii) E پر EX اس طرح کھینچئے کہ $\angle FEX = 50°$ ہو۔

(iii) F کو مرکز مان کر 6 سمر نصف قطر کا ایک قوس کاٹئے جو EX کو G پر قطع کرے۔

(iv) FG کو ملائیے۔

(v) EF اور FG کے عمودی ناصف کھینچئے جو ایک دوسرے کو 'O' پر کاٹیں۔

(vi) 'O' کو مرکز مان کر $(= OF = OG)=OE$ نصف قطر لے کر ایک حائط دائرہ بنائیے۔

(vii) G پر GY اس طرح کھینچئے کہ $\angle EGY = 40°$ ہو جو دائرہ کو نقطہ H پر قطع کرے۔

(viii) EH کو ملائیے۔

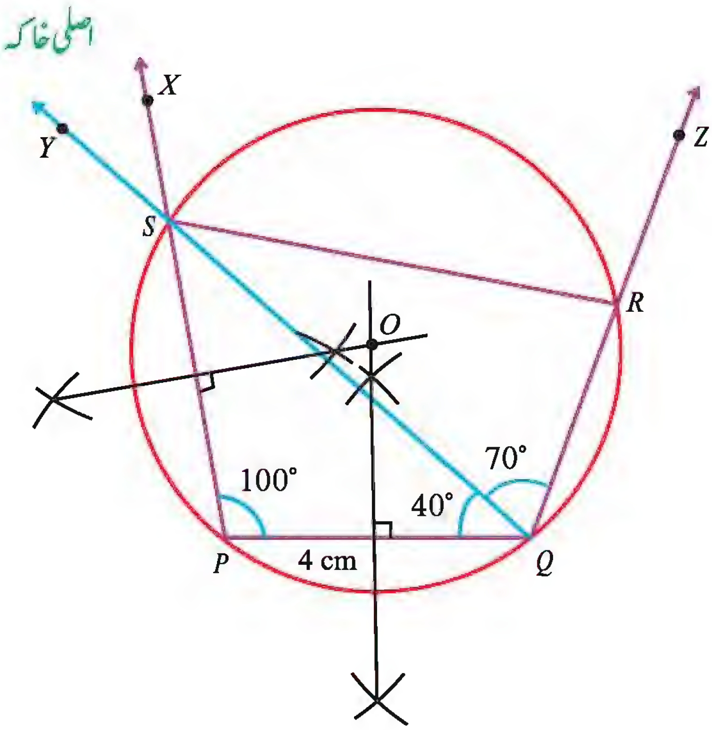
اب، $EFGH$ مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

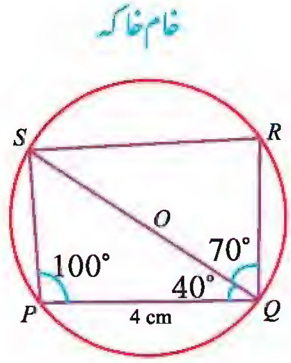
قسم V : ایک ضلعے اور تین زاویے دیے گئے ہوں تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال : 9.11

ایک چار ضلعی $PQRS$ تصنیف کیجیے، جس میں $PQ = 4$ سمر ، $\angle P = 100^\circ$ ، $\angle PQS = 40^\circ$ اور $\angle SQR = 70^\circ$ ہوں۔

دیا گیا ہے : $PQ = 4$ سمر ، $\angle P = 100^\circ$ ، $\angle PQS = 40^\circ$ اور $\angle SQR = 70^\circ$





تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنائیے اور اس میں پیمائشیں درج کیجیے۔ 4 سمر کا ایک قطاع خط PQ کھینچیے۔

(ii) P پر PX اس طرح کھینچیے کہ $\angle QPX = 100^\circ$ ہو۔

(iii) Q پر QY اس طرح کھینچیے کہ $\angle PQY = 40^\circ$ ہو۔ QY اور PX کو S پر ملنے دیں۔

(iv) PQ اور PS کے عمودی ناصف کھینچیے۔ جو ایک دوسرے کو O پر کاٹیں۔

(v) O کو مرکز مان کر $(= OQ = OS)$ OP نصف قطر لے کر مثلث PQS پر حائط دائرہ بنائیے۔

(vi) Q پر QZ اس طرح کھینچیے کہ $\angle SQZ = 70^\circ$ ہو اور وہ دائرہ کو R پر کاٹے۔

(vii) RS کو ملائیے۔

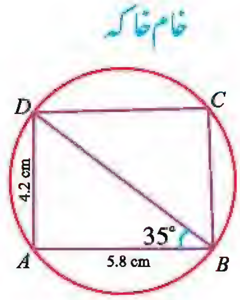
اب، $PQRS$ مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

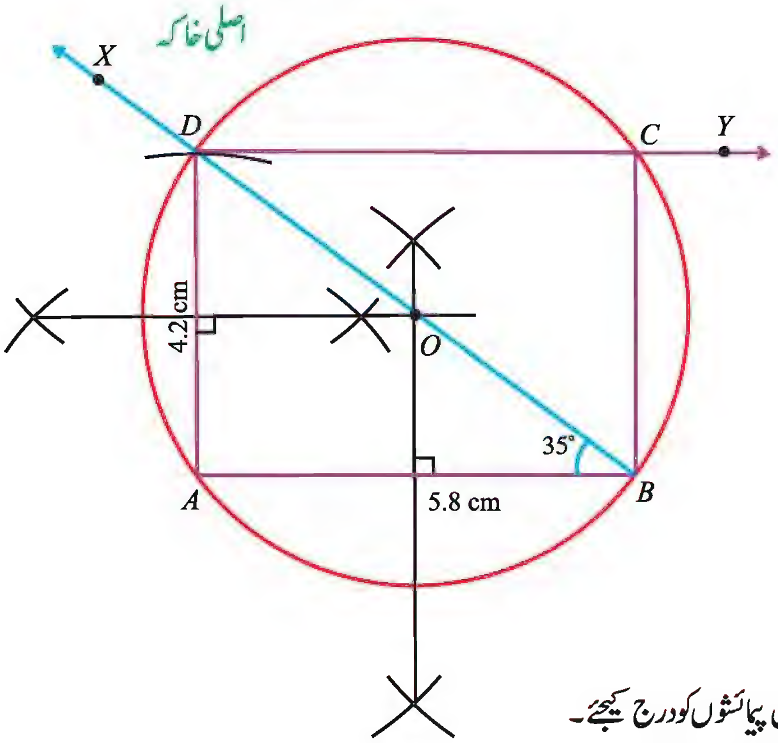
قسم VI : دو ضلعے، ایک زاویہ اور ایک متوازی خط دیا گیا ہو تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال 9.12

ایک مدور چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے۔ جس میں $AB = 5.8$ سمر ، $\angle ABD = 35^\circ$ ، $AD = 4.2$ سمر اور $AB \parallel CD$

دیا گیا ہے : $AB = 5.8$ سمر ، $\angle ABD = 35^\circ$ ، $AD = 4.2$ سمر اور $AB \parallel CD$





تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ کھینچئے اور اس میں پیمائشوں کو درج کیجئے۔
اور $AB = 5.8$ سمر کا ایک قطاع خط کھینچئے۔

(ii) B پر BX اس طرح کھینچئے کہ $\angle ABX = 35^\circ$ ہو۔

(iii) A کو مرکز مان کر 4.2 سمر کا ایک قوس کاٹئے جو BX کو D پر قطع کرے۔

(iv) AB اور AD کے عمودی ناصف کھینچئے جو ایک دوسرے کو O پر قطع کریں۔

(v) $'O'$ کو مرکز مان $OA=(OB = OD =)$ نصف قطر لے کر مثلث ABD پر ایک حائط دائرہ بنائیے۔

(vi) DY اس طرح کھینچئے کہ $AB \parallel DY$ (DY متوازی ہے AB کے) دائرے کے اوپر C پر قطع کرے۔
BC کو ملائیے۔

(vii) اب، $ABCD$ مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

مشق 9.3

.1 $PQRS$ ایک مدور چار ضلعی تصنیف کیجئے۔ جس میں $PQ = 6.5$ سمر ، $QR = 5.5$ سمر اور $PR = 7$ سمر ، $PS = 4.5$ سمر ہوں۔

.2 ایک مدور چار ضلعی ABCD تصنیف کیجئے۔ جس میں $AB = 6$ سمر ، $AD = 4.8$ سمر ، $BD = 8$ سمر اور $CD = 5.5$ سمر ہوں۔

.3 ایک مدور چار ضلعی $PQRS$ تصنیف کیجئے جس میں $PQ = 5.5$ سمر ، $QR = 4.5$ سمر ، $\angle QPR = 45°$ اور $PS = 3$ سمر ہوں۔

.4 ایک مدور چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے جس میں $AB = 7$ سمر ، $\angle A = 80°$ ، $AD = 4.5$ سمر اور $BC = 5$ سمر ہوں۔

.5 ایک مدور چار ضلعی $KLMN$ تصنیف کیجئے جس میں $KL = 5.5$ سمر ، $KM = 5$ سمر ، $LM = 4.2$ سمر ، $LN = 5.3$ سمر ہوں۔

.6 ایک مدور چار ضلعی $EFGH$ تصنیف کیجئے جس میں $EF = 7$ سمر ، $EH = 4.8$ سمر ، $FH = 6.5$ سمر اور $EG = 6.6$ سمر ہوں۔

.7 ایک مدور چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے جس میں $AB = 6$ سمر ، $\angle ABC = 70°$ ، $BC = 5$ سمر اور $\angle ACD = 30°$ ہوں۔

.8 ایک مدور چار ضلعی $PQRS$ تصنیف کیجئے۔ جس میں $PQ = 5$ سمر ، $QR = 4$ سمر ، $\angle QPR = 35°$ ، اور $\angle PRS = 70°$ ہوں۔

.9 ایک مدور چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے جس میں $AB = 5.5$ سمر ، $\angle ABC = 50°$ ، $\angle BAC = 60°$ اور $\angle ACD = 30°$ ہوں۔

.10 ایک مدور چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے جس میں $AB = 6.5$ سمر ، $\angle ABC = 110°$ ، $BC = 5.5$ سمر اور $AB \parallel CD$ ہوں۔

کیا تم جانتے ہو ؟

1901ء سے آج تک طبعیات، کیمیاء، نفسیات یا علم طب، ادب اور امن میں بہتر کارنامے انجام دینے والوں کو معزز نوبل انعام سے نوازا جاتا ہے۔ یہ نوبل انعام ایک عالمی ایوارڈ ہے جس کا انتظامیہ ملک سویڈن، اسٹاک ہوم میں واقع نوبل فاؤنڈیشن کرتی ہے۔ حساب کے لئے نوبل انعام نہیں دیا جاتا۔

فیلڈس میڈل ایک انعام ہے جو اُن دو، تین یا چار ریاضی دانوں کو دیا جاتا ہے جن کی عمریں 40 سال سے زیادہ نہ ہوں۔ یہ ایوارڈ چار سال میں ایک مرتبہ عالمی ریاضی یونین (IMU) کے عالمی کانگریس کی میٹنگ میں پیش کیا جاتا ہے۔

فیلڈس میڈل کو عام طور پر علم ریاضی کا نوبل انعام قرار دیا جاتا ہے۔

10

ترسیمات (GRAPHS)

⌘ تعارف/ تمہید
⌘ دودرجی ترسیمات
⌘ مخصوص ترسیمات

I think, therefore I am

- Rene Descartes

رینی ڈسکارٹس

(1596-1650)

فرانس

ڈسکارٹس جب ہسپتال کے بستر میں تھے، اُس وقت انہوں نے کمرے کے ایک کونے میں ایک مکھی کو بھنبھناتے ہوئے دیکھا اورتبھی انہوں نے کارتیسی مسطح کی تشکیل دی۔

انہوں نے تجزیاتی علم ہندسہ کی تخلیق کی جو محددی محوروں میں مرتسم کرنے کی راہ بنی۔

10.1 تمہید

ترسیمات وہ خاکے ہیں جو معلومات مہیّا کرتے ہیں۔ترسیمات یہ دِکھاتی ہیں کہ کس طرح دومختلف مقداریں ایک دوسرے سے تعلق رکھتی ہیں۔ جیسے وزن کا تعلق عمر سے ہے۔ بعض اوقات الجبرا کی مدد سے کسی تصویر کو ذہن میں لانا مشکل ہوسکتا ہے۔علامتی عبارتیں اوران کی ترسیمات الجبریائی نمونوں کو سمجھنے کے لئے راہیں کھولتے ہیں۔

زیرِغورمسئلوں کو سمجھنے کیلئے طلباء کو چاہیئے کہ ایک مناسب ٹھیک ترسیم کھینچنے کی عادت ڈالیں۔ایک محتاط طریقہ پر بنائی گئی ترسیم نہ صرف مسئلوں کی ہندسوی تشریح کو واضح کرتی ہے بلکہ الجبریائی طور پر کام کے درستگی کی ایک قیمتی جانچ بھی کرتی ہے۔کسی کو یہ نہیں بھولنا چاہیئے کہ ترسیمی نتائج نہ صرف تقریبی قیمتوں کیلئے بہترین ہیں بلکہ ان کی قیمتوں سے کھینچی جانے والی ترسیم کی درستگی کے تناسب میں بھی ہیں۔

10.2 دودرجی ترسیمات (Quadratic graphs)

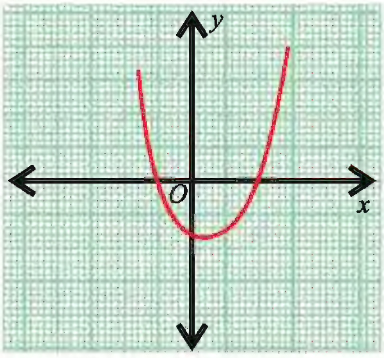
تعریف

فرض کریں کہ $f : A \to B$ ایک تفاعل ہے۔جس میں A اور B تحتی سٹ ہیں R-کے سٹ $\{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\}$ کے اس طرح کی تمام ترتیب وار جوڑیوں کو 'f' کی ترسیم کہتے ہیں۔

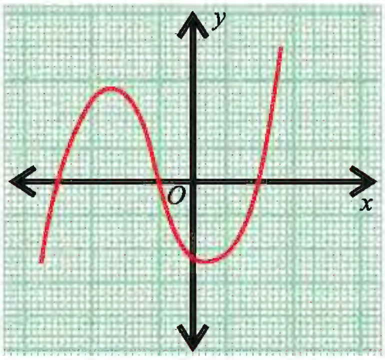
x میں ایک کثیر رقمی تفاعل کوایک ترسیم سے ظاہر کرسکتے ہیں۔پہلے درجے کی کثیر رقمی $y = f(x) = ax + b$ کی ترسیم ایک جھکا ہوا خط (oblique line) ہے جس کا میلان 'a' ہے۔

دوسرے درجے کی کثیر رقمی $y = f(x) = ax^2 + bx + c \; , \; a \neq 0$ کی ترسیم ایک نااختتام پزیر غیر خطی منحنی ہے جس کو ہم خط مکافی (Parabola) کے نام سے جانتے ہیں۔

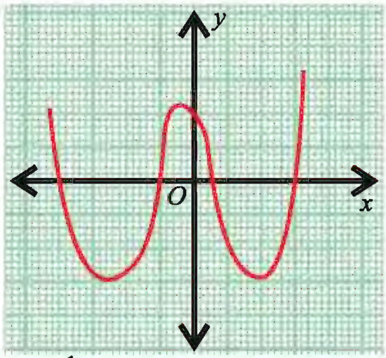
ذیل کی ترسیمات مختلف کثیر رقمیات کو ظاہر کرتی ہیں۔



$y = (x+1)(x-2)$,
2 درجی کثیررقمی



$y = (x+4)(x+1)(x-2)$,
3 درجی کثیررقمی



$y = \frac{1}{14}(x+4)(x+1)(x-3)(x-0.5)$
4 درجی کثیررقمی

نویں جماعت ہم نے سیکھا کہ کس طرح خطی کثیر رقمیات کی ترسیمات کھینچی جاتی ہیں اب ہم دو درجی تفاعل $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ جہاں a, b اور c حقیقی مستقل ہیں اور $a \neq 0$ ، ان کے ترسیمات کی نوعیت پر غور کریں گے۔

فرض کریں کہ $\quad y = ax^2 + bx + c$

کامل مربع کے طریقے سے اوپری کثیر رقمی کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

(ایک عبارت کا مربع ہمیشہ مثبت ہوگا) لہٰذا

$$\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \geq 0.$$

منحنی (خط مکافی) (Parabola) کا راس $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

اگر $a > 0$ ہو تو منحنی اوپری جانب کھلی ہوگی، یہ خط $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ کے اوپر یا خط پر ہی ہوگی اور $x = -\frac{b}{2a}$. کے تشاکل میں ہوگی

اگر $a < 0$ ہو تو منحنی نیچے کی جانب کھلی ہوگی، یہ خط $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ کے نیچے یا خط پر ہی ہوگی اور $x = -\frac{b}{2a}$. کے تشاکل میں ہوگی

آیئے دو درجی کثیر رقمیوں کی بعض مثالیں دیکھیں اور جدول کی مدد سے ان کے ترسیموں کی نوعیت کو بھی دیکھیں۔

شمار عدد	کثیر رقمی $y = ax^2 + bx + c$	راس	a کی علامت	منحنی کی نوعیت
1	$y = 2x^2$ $a = 2,\ b = 0, c = 0$	(0, 0)	مثبت	(i) اوپری جانب کھلی ہوگی (ii) $y=0$ کے اوپر یا خط پر ہی ہوگی (iii) $x=0$ کے تشاکل میں ہوگی یعنی y- محور
2	$y = -3x^2$ $a = -3,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	منفی	(i) نیچے کی جانب کھلی ہوگی (ii) $y=0$ کے نیچے یا خط پر ہی ہوگی (iii) $x=0$ کے تشاکل میں ہوگی یعنی y- محور
3	$y = x^2 - 2x - 3$ $a = 1, b = -2, c = -3$	(1, –4)	مثبت	(i) اوپری جانب کھلی ہوگی (ii) $y=-4$ کے اوپر یا خط پر ہی ہوگی (iii) $x=1$ کے تشاکل ہوگی

دودرجی ترسیم $y = ax^2 + bx + c$ بنانے کے لئے طریقے :

(i) $y = ax^2 + bx + c$ کو استعمال کرتے ہوئے x اور y کی قیمتوں کو لے کر ایک جدول تیار کیجئے۔

(ii) ایک مناسب پیائش کا انتخاب کیجئے۔

یہ ضروری نہیں کہ جتنی پیائش x- محور پر لی گئی ہو، اتنی ہی پیائش y- محور پر بھی لی جائے۔ پیائش ایسی ہو کہ اس کی مدد سے ممکن حد تک بڑی ترسیم بنائی جائے۔ ترسیم جتنی زیادہ بڑی ہوگی، اس کا نتیجہ اتنا ہی زیادہ ٹھیک ہوگا۔

(iii) چونکہ $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم میں قطاع خطوط نہیں ہیں، اس لئے ترسیمی کاغذ پر نقاط کو مرتسم کر کے ان نقاط کو ایک ہموار خط کی شکل میں ملائیں۔

مثال 10.1

$y = 2x^2$ کی ترسیم کھینچئے۔

حل :

سب سے پہلے ہم x کیلئے -3 سے 3 تک سالم اعداد کی قیمتیں لیں گے اور ذیل کی جدول تیار کریں گے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y^2 = 2x$	18	8	2	0	2	8	18

نقاط $(-3, 18), (-2, 8), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 8), (3, 18)$ کو ترسیمی کاغذ پر مرتسم کیجئے۔

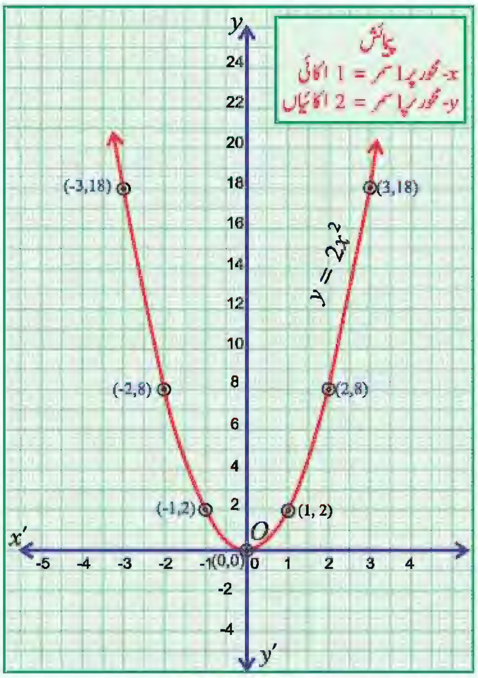


Fig. 10.1

ایک ہموار منحنی سے ان نقاط کو ملایئے۔

غرض اس طرح حاصل ہونے والی ترسیم $y = 2x^2$ کی ترسیم ہے۔

غور کریں :

(i) یہ y- محور پر متشاکل (symmetrical) ہے۔ یعنی y- محور کے بائیں جانب کا حِصّہ y- محور کے دائیں جانب کے حصّے کا مرئی خیال (mirror image) ہے۔

(ii) ترسیم x محور سے نیچے نہیں گزرتی کیونکہ y کی قیمتیں غیر منفی ہیں۔

مثال 10.2

$y = -3x^2$ کی ترسیم کھینچئے

حل :

آیئے ہم x کیلئے -3 سے 3 تک سالم اعداد کی قیمتیں لیں اور درج ذیل جدول تیار کریں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y^2 = -3x$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27

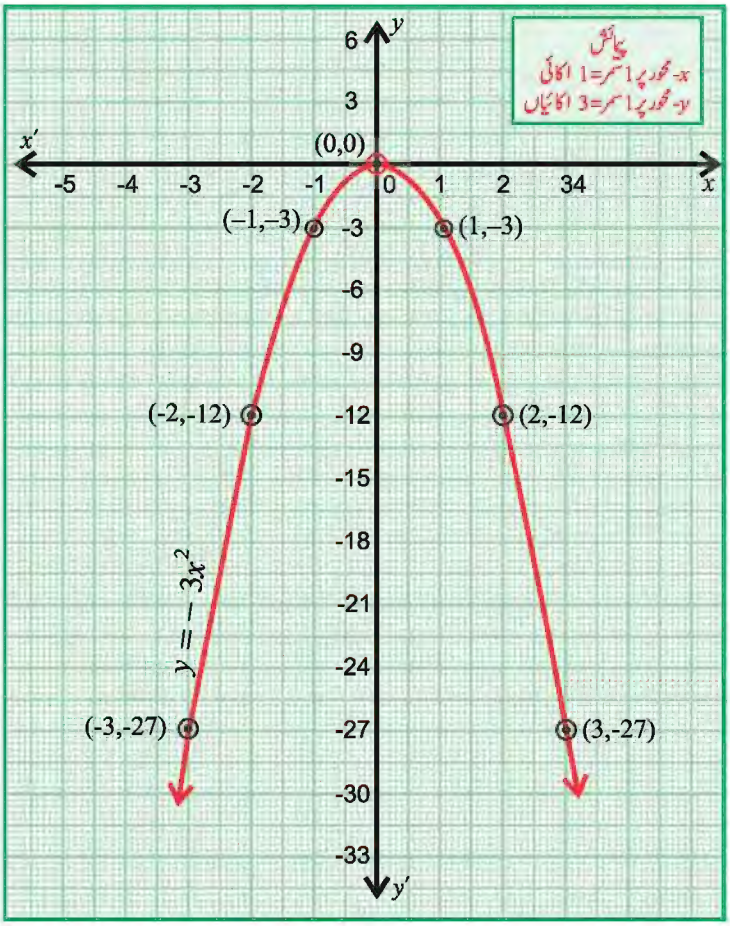


Fig. 10.2

$(-3,-27)$, $(-2,-12)$,$(-1,-3)$, $(0,0)$, $(1,-3)$, $(2,-12)$, $(3,-27)$ نقاط مرتسم کیجئے۔

ہموار منحنی کے ذریعے نقاط کو ملایئے۔

اس طرح حاصل ہونے والی منحنی $y = -3x^2$ کی ترسیم ہے۔

نوٹ :

(i) $y = -3x^2$ کی ترسیم x محور کے اوپر سے نہیں گزرتی ہے کیونکہ y ہمیشہ منفی ہے۔

(ii) ترسیم y- محور پر متشاکل ہے۔

10.2.1 دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کو ترسیما حل کرنا

$ax^2 + bx + c = 0$ دودرجی مساوات کی جذروں کو ترسیما دریافت کرنے کے لئے آیئے ہم $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم کھینچیں۔ مطلوبہ مساوات کے جذر نقطۂ تقاطع کے x محدّد ہیں جو منحنی x محور کو قطاع کرتی ہیں، بشرطیکہ وہ قطاع کریں۔

مثال 10.3

مساوات $x^2 - 2x - 3 = 0$ کو ترسیماً حل کیجئے۔

حل : پہلے $y = x^2 - 2x - 3 = 0$ کی ترسیم کھینچئے۔

اب x کیلئے -3 سے 4 تک سالم اعداد کی قیمتیں لے کر $y = x^2 - 2x - 3 = 0$ کی بالترتیب قیمتیں دریافت کر کے ذیل کی جدول تیار کیجئے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

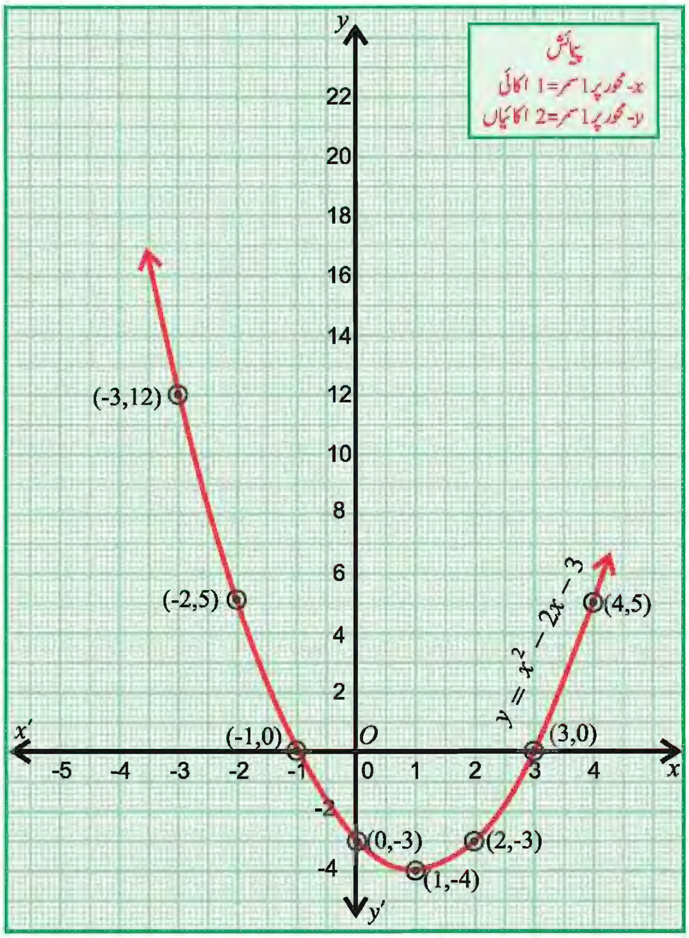


Fig. 10.3

$(-3, 12)$, $(-2, 5)$, $(-1, 0)$, $(0, -3)$, $(1, -4)$, $(2, -3)$, $(3, 0)$, $(4, 5)$ نقاط مرتسم کیجئے اور نقاط کو ایک ہموار منحنی سے ملائیے۔

منحنی x محور کو $(-1, 0)$ اور $(3, 0)$ نقاط پر قطع کرتی ہے۔

مذکورہ بالا نقاط کے x محدّد -1 اور 3 ہیں۔

چنانچہ حل مجموعہ $\{-1, 3\}$ ہے۔

نوٹ :

(i) x محور پر ہمیشہ $y = 0$ ہے۔

(ii) y کی قیمتیں مثبت اور منفی دونوں ہیں۔

غرض منحنی x محور کے نیچے اور اوپر سے گزرتی ہے۔

(iii) چونکہ منحنی $x=1$ پر تشاکل ہے، (اس لئے منحنی y محور پر متشاکل نہیں ہے)۔

مثال 10.4

$2x^2 + x - 6 = 0$ کو ترسیماً حل کیجئے۔

حل :

آیئے ہم پہلے ذیل کی جدول تیار کریں۔ x کی -3 سے 3 تک سالم اعداد کی قیمتیں لیکر $y = 2x^2 + x - 6 = 0$ کی بالترتیب قیمتیں دریافت کرتے ہیں۔

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
−6	−6	−6	−6	−6	−6	−6	−6
y	9	0	−5	−6	−3	4	15

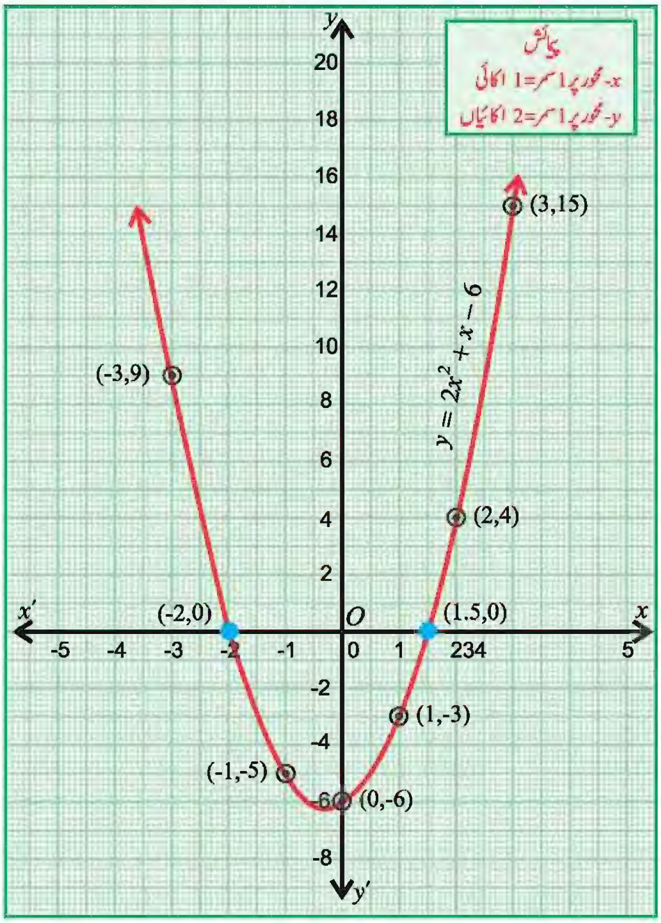


Fig. 10.4

$(-3, 9)$, $(-2, 0)$, $(-1, -5)$, $(0, -6)$, $(1, -3)$, $(2, 4)$ اور $(3, 15)$ نقاط مرتسم کیجئے۔

نقاط کو ایک ہموار منحنی سے ملایئے۔

غرض حاصل ہونے والی ترسیم $y = 2x^2 + x - 6 = 0$ کی ترسیم ہے۔

منحنی x- محور کو نقاط $(-2, 0)$ اور $(1.5, 0)$ پر قطع کرتی ہے۔

چنانچہ حل کا مجموعہ ہے $\{-2, 1.5\}$

برائے ذہن نشینی

$2x^2 + x - 6 = 0$ کو ترسیماً حل کرنے کے لئے ہم اس طرح عمل کریں گے۔

(i) $y = 2x^2$ کی ترسیم بنایئے۔

(ii) $y = 6 - x$ کی ترسیم بنایئے۔

(iii) ان دونوں ترسیموں کا نقطہ تقاطع $2x^2 + x - 6 = 0$ کا حل ہوگا۔

مثال 10.5

$y = 2x^2$ کی ترسیم کھینچیے۔ اس کی مدد سے $2x^2 + x - 6 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل :

آیئے پہلے ہم $y = 2x^2$ کی ترسیم بنائیں۔ ذیل کی جدول تیار کریں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y^2 = 2x$	18	8	2	0	2	8	18

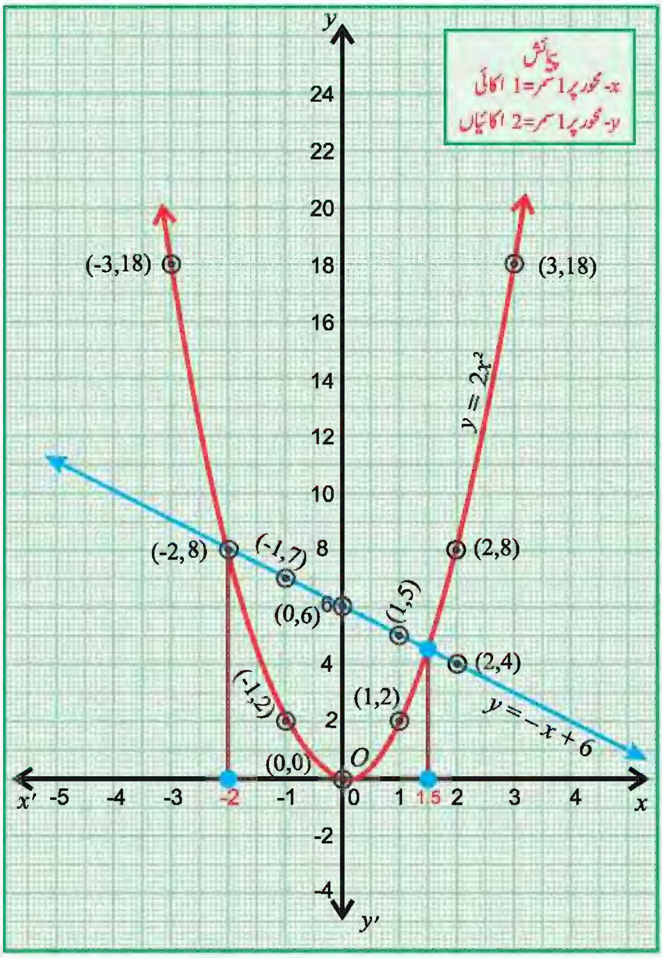


Fig. 10.5

$(-3, 18)$, $(-2, 8)$, $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 8)$, $(3, 18)$ نقاط مرتسم کریں۔

نقاط کو ہموار منحنی کے ذریعے ایک ترسیم کھینچیں۔

$2x^2 + x - 6 = 0$ کے جذور دریافت کرنے کے لئے دو مساوات کو حل کیجیے۔ $y = 2x^2$ اور $2x^2 + x - 6 = 0$

اب $2x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow y + x - 6 = 0$ چونکہ $y = 2x^2$ ہے۔

لہٰذا $y = -x + 6$ ہے۔

چنانچہ $2x^2 + x - 6 = 0$ کے جذور کچھ اور نہیں بلکہ $y = 2x^2$ اور $y = -x + 6$ کے نقطۂ تقاطع کے x محدد ہیں۔

اب خطِ مستقیم $y = -x + 6$ کیلئے درج ذیل جدول تیار کریں۔

x	-1	0	1	2
$y = -x + 6$	7	6	5	4

مذکورہ بالا نقاط کو ملا کر خطِ مستقیم کھینچیے۔ خطِ مستقیم اور خطِ مکافی کے نقطۂ تقاطع $(-2, 8)$ اور $(1.5, 4.5)$ ہیں۔

ان نقاط کے x محدد -2 اور 4.5 ہیں۔

غرض مساوات $2x^2 + x - 6 = 0$ کے جذور کا حل مجموعہ $\{-2, 1.5\}$ ہے۔

مثال 10.6

$y = x^2 + 3x + 2$ کی ترسیم کھینچئے اور اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات $x^2 + 2x + 4 = 0$ کو حل کیجئے۔

حل :

آیئے پہلے ہم $y = x^2 + 3x + 2$ کی جدول بنائیں۔

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
$3x$	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

$(-4, 6)$, $(-3, 2)$, $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 6)$, $(2, 12)$, $(3, 20)$

نقاط کو مرتسم کیجئے۔

اب نقاط کو ایک ہموار منحنی سے ملایئے۔اس طرح حاصل ہونے والی منحنی $y = x^2 + 3x + 2$ کی ترسیم ہے۔

اب $\quad x^2 + 2x + 4 = 0$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 - x + 2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad y = x - 2 \qquad \because\ y = x^2 + 3x + 2$$

چنانچہ $x^2 + 2x + 4 = 0$ کے جذور $y = x - 2$ اور $y = x^2 + 3x + 2$ کے نقطۂ تقاطع سے حاصل ہوتے ہیں ۔

آیئے ہم $y = x - 2$ خطِ مستقیم کی ترسیم کھینچیں۔

اب $y = x - 2$ خط کیلئے جدول تیار کریں۔

x	–2	0	1	2
$y = x - 2$	–4	–2	–1	0

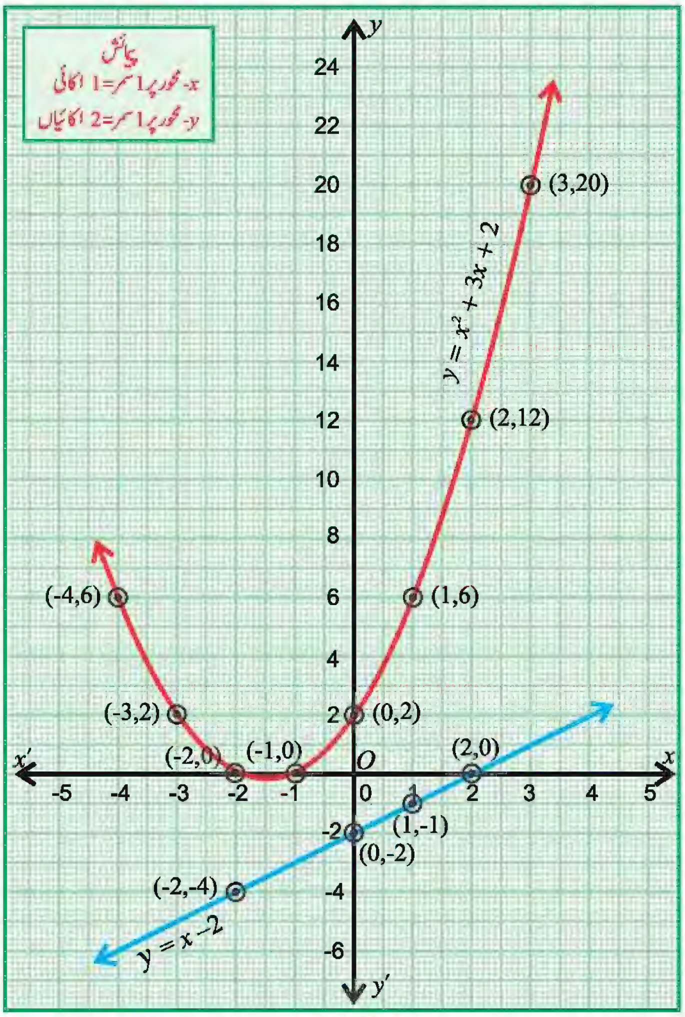


Fig. 10.6

خطِ مستقیم $y = x - 2$, منحنی $y = x^2 + 3x + 2$ کو قطع نہیں کرتی ہے۔

چنانچہ $x^2 + 2x + 4 = 0$ کے جذور حقیقی نہیں ہیں۔

مشق 10.1

1) ذیل کے تفاعلات کی ترسیمات کھینچئے۔

(i) $y^2 = 3x$

(ii) $y^2 = -4x$

(iii) $y = (x+2)(x+4)$

(iv) $y = 2x^2 - x + 3$

2) ذیل کی مساوات کو ترسیماً حل کیجئے۔

(i) $x^2 - 4 = 0$

(ii) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(iii) $(x-5)(x-1) = 0$

(iv) $(2x+1)(x-3) = 0$

3) $y = x^2$ کی ترسیم کھینچئے۔اسکی مدد سے $x^2 - 4x - 5 = 0$ کو حل کیجئے۔

4) $y = x^2 + 2x - 3$ ترسیم کھینچئے اسکی مدد سے $x^2 - x - 6 = 0$ کے جذور دریافت کیجئے۔

5) $y = 2x^2 + x - 6$ ترسیم کھینچئے اسکی مدد سے $2x^2 + x - 10 = 0$ کو حل کیجئے۔

6) $y = x^2 - x - 8$ ترسیم کھینچئے اسکی مدد سے $x^2 - 2x - 15 = 0$ کے جذور دریافت کیجئے۔

7) $y = x^2 + x - 12$ ترسیم کھینچئے اسکی مدد سے $x^2 + 2x + 2 = 0$ کو حل کیجئے۔

10.3 چند مخصوص ترسیمات (Some special graphs):

اس قطعہ میں ہم معلوم کریں گے کہ ترسیمات کس طرح کھینچی جاتی ہیں جب متغیرات اس طرح ہوں۔

(i) راست تغیر (Direct variation) (ii) بلاراست تغیر (Indirect variation)

اگر، x,y کے راست تناسب میں ہو تو بعض مثبت k کی قیمتوں کے لئے ہمیں $y = kx$ حاصل ہوتا ہے۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں متغیرات ، راست تغیر میں ہیں اور ان کی ترسیم ایک خطِ مستقیم ہے۔

اگر، x,y کے معکوس تناسب میں ہو تو بعض مثبت k کی قیمتوں کے لئے ہمیں $y = \frac{k}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں متغیرات، بلاراست تغیر میں ہیں اور اس کی ترسیم ایک ہموار منحنی ہے۔اِس کو مستطیلی ہذلولی (Rectangular Hyperbola) کہا جاتا ہے۔ (ایک مستطیلی ہذلولی کی مساوات $xy = k,\ k>0$ کی شکل میں ہوگی)۔

مثال 10.7

ذیل کی جدول کیلئے ترسیم کھینچئے اور تغیّر کی پہچان کیجئے۔

x	2	3	5	8	10
y	8	12	20	32	40

چنانچہ جب $x = 4$ ہو تو y کی قیمت دریافت کیجئے۔

حل :

جدول سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ جیسے جیسے x بڑھتا ہے y بھی بڑھتا ہے۔ چنانچہ یہ راست تغیر میں ہے۔

فرض کرو کہ $y = kx$

$\dfrac{y}{x} = k \implies$ جہاں k تناسبیت کا مستقل (constant of proportionality) ہے۔

دی گئی قیمتوں سے ہمیں

$$k = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots = \frac{40}{10}. \quad \therefore\ k = 4$$

تعلق $y = 4x$ ایک خطِ مستقیم ترسیم ہے۔

$(2,8),\ (3,12),\ (5,20),(8,32),(10,40)$

نقاط کو مرتسم کیجئے اور ان نقاط کو ملا کر ایک خطِ مستقیم حاصل کیجئے۔

واضح ہے کہ جب $x = 4$ ہے تو $y = 4x = 16$ ہے۔

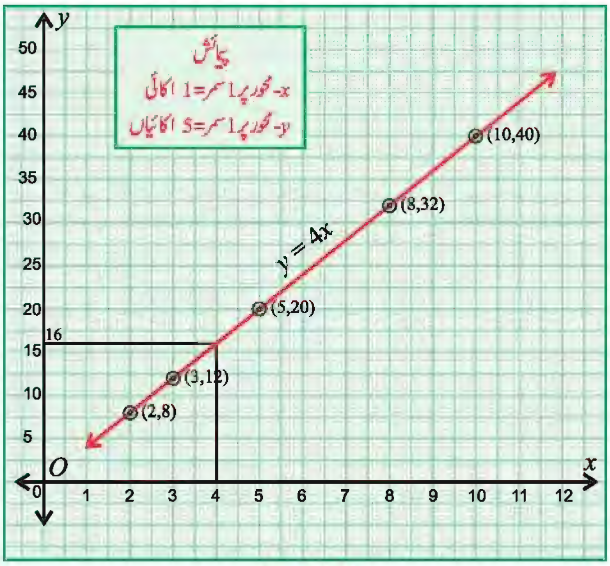


Fig. 10.7

مثال 10.8

ایک سائیکل چلانے والا مقام A سے مقام B کو ایک ہی راستے سے ایک مستقل رفتار سے مختلف دنوں میں سفر کرتا ہے۔ ذیل کی جدول اُس کے سفر کی رفتار اور اُس فاصلہ کو طے کرنے کے لئے بالترتیب لیا گیا وقت ظاہر کرتی ہے۔

رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ میں x	2	4	6	10	12
وقت گھنٹوں میں y	60	30	20	12	10

رفتار ۔ وقت کی ترسیم کھینچئے اور اس کو استعمال کر کے دریافت کیجئے۔

(i) اگر وہ 5 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کرے تو اس سے لئے گئے گھنٹوں کی تعداد

(ii) اگر اُس فاصلہ کو 40 گھنٹوں میں طے کرنا ہو تو اُسکو کتنی رفتار سے سفر کرنا چاہئے۔

حل :

جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے جیسے x میں اضافہ ہوتا ہے y گھٹتا ہے۔ اس طرح کے تغیر کو بلا راست تغیر کہتے ہیں۔

یہاں پر $xy = 120$ ہے۔

غرض $y = \frac{120}{x}$

نقاط $(2, 60)$, $(4, 30)$, $(6, 20)$, $(10, 12)$, $(12,10)$ کو مرتسم کیجئے۔

ان نقاط کو ایک ہموار منحنی سے ملائیے۔

ترسیم سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

(i) 5 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر طے کرنے کے لئے درکار گھنٹوں کی تعداد 24 ہے۔

(ii) 40 گھنٹوں میں فاصلہ طے کرنے کے لئے درکار رفتار 3 کلومیٹر / گھنٹہ ہے۔

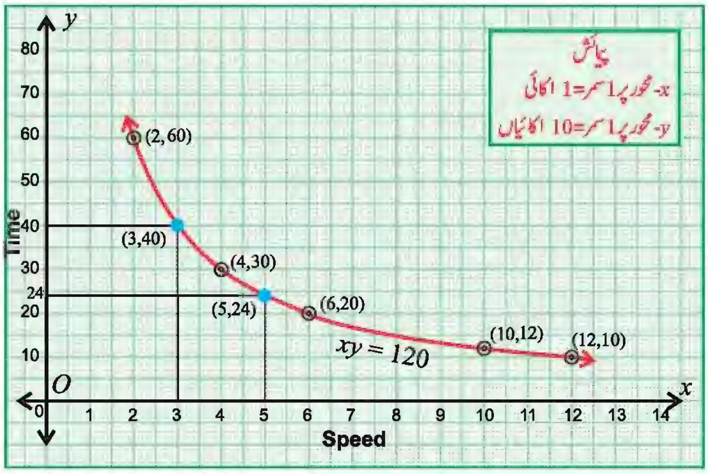


Fig. 10.8

مثال 10.9

ایک بنک بزرگ شہریوں (senior citizen) کی جمع کردہ رقم پر 10% سادہ سود دیتی ہے۔ جمع کردہ رقم اور ایک سال میں اس کے حاصل کردہ سود کے درمیان تعلق کی ترسیم کھینچیے۔ چنانچہ دریافت کیجئے:

(i) ₹ 650 کی جمع شُدہ رقم کا سود۔ (ii) ₹ 45 سود حاصل کرنے کیلئے جمع شُدہ رقم۔

حل :

آیئے ہم ذیل کی جدول تیار کریں۔

x ₹ جمع شُدہ رقم	100	200	300	400	500	600	700
y ₹ حاصل کردہ سود	10	20	30	40	50	60	70

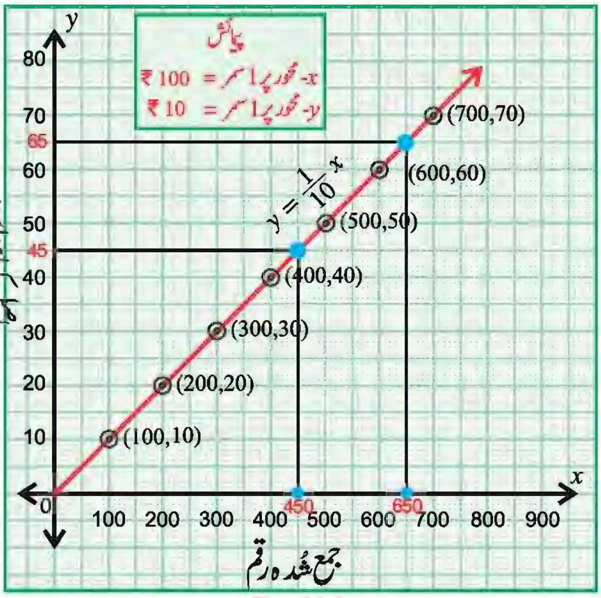


Fig. 10.9

ظاہر ہے $y = \frac{1}{10}x$ اور ترسیم ایک خطِ مستقیم ہے۔

جدول میں دیئے گئے نقاط کی مدد سے ترسیم کھینچیے۔

ترسیم سے ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ

(i) ₹ 650 جمع شدہ رقم پر سود ₹ 65

(ii) ₹ 45 سود حاصل کرنے کیلئے ₹ 450 جمع کرنے ہوں گے۔

مشق 10.2

1) ایک بس 40 کلومیٹر/ گھنٹہ کی رفتار سے سفر کرتی ہے۔فاصلہ وقت کا ضابطہ لکھئے اور اسکی ترسیم کھینچئے۔ چنانچہ 3 گھنٹوں میں طے کیا گیا فاصلہ دریافت کیجئے۔

2) ذیل کی جدول خریدی ہوئی نوٹ بکوں کی قیمت اور تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔

نوٹ بکوں کی تعداد x	2	4	6	8	10	12
قیمت ₹ y	30	60	90	120	150	180

ترسیم کھینچئے اور (i) سات نوٹ بکوں کی قیمت دریافت کیجئے۔ (ii) 165 ₹ میں کتنے نوٹ بکس خریدے جاسکتے ہیں؟

(3

x	1	3	5	7	8
y	2	6	10	14	16

مذکورہ بالا جدول کی ترسیم کھینچئے اور دریافت کیجئے۔

(i) اگر x=4 ہوتو y کی قیمت معلوم کیجئے۔ (ii) اگر y = 12 ہوتو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

4) ایک لیٹر دودھ کی قیمت 15 ₹ ہے۔مقدار اور قیمت کے درمیان تعلق معلوم کرتے ہوئے ترسیم کھینچئے اور دریافت کیجئے

(i) تناسبیت کا مستقل (proportionality constant)

(ii) 3 لیٹر دودھ کی قیمت

(5 $xy = 20, x, y > 0$ کی ترسیم کھینچئے۔ترسیم کو استعمال کرکے اگر $x = 5$ ہوتو y کی قیمت دریافت کیجئے، اور اگر y = 10 ہوتو x کی قیمت دریافت کیجئے۔

(6 جدول میں دی گئی معطیات کیلئے ترسیم کھینچئے اور معلوم کیجئے کہ 12 مزدور اُس کام کو کتنے دنوں میں مکمل کرسکتے ہیں۔

مزدوروں کی تعداد x	3	4	6	8	9	16
دنوں کی تعداد y	96	72	48	36	32	18

غور کئے جانے والے اقوال :

1۔ علم ریاضی میں سوال کے حل کرنے سے زیادہ سوال بنانے کا فن اہمیت رکھتا ہے۔ جارج کینٹر۔

2۔ علم ریاضی کو دیگر علوم سائنس کی بہ نسبت اتنا بلند مقام اس لئے حاصل ہے کہ اس کے قوانین مستحکم اور غیر تنازعہ والے ہیں۔جب کہ علوم سائنس کے بعض قوانین پر بحث بھی کی جاتی ہے اور اس میں نئے حقائق اور ایجادات، پرانے قوانین کو رد کرنے کا خوف بھی رہتا ہے۔البرٹ آئن سٹائن

11

شماریات
STATISTICS

It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it
-Andrejs Dunkels

- تعارف
- انتشار کی پیمائش
  - وسعت
  - اختلاف
  - معیاری انحراف
- اختلاف کا ضریب

11.1 تعارف

کراکسٹن اور کوڈن کے مطابق شماریات سے مراد عددی معطیات کا جمع کرنا، پیش کرنا، تجزیہ کرنا اور ان کا سمجھنا ہے۔ پروفیسر فشر کا کہنا ہے کہ شماریات علم ریاضی کا ایک ضروری اور اہم شعبہ ہے، اور علم ریاضی کی طرح مشاہداتی معطیات میں بھی استعمال ہوتا ہے۔

پروفیسر ہورلیس سیکرسٹ نے شماریات کو یوں بیان کیا ہے۔

"شماریات سے ہماری مراد وہ حقیقی مجموعے ہیں، جو عدد میں ظاہر کرنے کے لئے درستگی کے مناسب معیار کے مطابق اندازہ لگانے کے لئے پہلے سے متعین کئے گئے مقاصد کو ترسیمی طریقہ سے جمع کرنے کے لئے اور ایک دوسرے کے تعلق سے مقام رکھنے کے لئے جملہ واقعات کو کثیر وجوہات کی بنا پر نشاندہی کی حد تک متاثر کرتے ہیں۔

شماریات کا لفظ پہلی مرتبہ جے۔ ایف۔ بیرون (J.F.Baron) نے اپنی تصنیف (Elements of Universal Erudiation) میں استعمال کیا۔ موجودہ دور میں شماریات معطیات کے جمع کرنے اور انہیں نقشہ اور ترسیم کے ذریعہ پیش کرنے تک ہی محدود نہیں ہے، بلکہ مشاہداتی معطیات سے متعلق بنیادی نتائج اخذ کرنا، جیسے وسیع دائرے پر محیط ہے۔

مرکزی رجحان کی پیمائش مثلاً اوسط، وسطانیہ، اور طرز سے متعلق ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں۔ ان سے ہمیں مرکزی حصے کے پھیلاؤ سے متعلق معطیات یا مشاہدات پر متوجہ ہونے کا خیال ملتا ہے۔

مرکزی رجحان کی پیمائش، پھیلاؤ سے متعلق ایک مکمل خیال پیش نہیں کرتے۔ مثال کے طور پر ذیل کے دو سلسلوں پر غور کیجئے۔

(i) 82, 74, 89, 95 اور (ii) 120, 62, 28,130 دونوں پھیلاؤ کا ایک ہی اوسط 85 ہے۔ پہلے سلسلے میں اعداد اوسط سے زیادہ قریب ہیں، جب کہ دوسرے سلسلے میں اعداد اوسط 85 سے وسیع طور پر منتشر ہیں۔

کارل پیرسن
(1857-1936)
انگلستان

انگلستان کے شماریات دان کارل پیرسن، جدید شماریات کے بانی ہیں۔ انہوں نے حسابی شماریات کو منظم بنایا۔ انہوں نے کے نظریہ کا تعارف کروایا جسے طبیعیات سے لیا گیا تھا۔

ان کی تصنیف "سائنس کی گرامر" میں انہوں نے بعض ایسے حقائق کو پیش کیا، جو آگے چل کر البرٹ آئنسٹائن اور دیگر سائنس دانوں کے نظریوں کی بنیاد بنے۔

غرض مرکزی رجحان کی پیائشیں ہمیں غلط رہنمائی بھی کرسکتی ہیں۔ ہمیں ایک ایسے پیائشوں کی ضرورت ہے جو یہ بتا سکیں کہ معطیات اوسط کے اردگرد کس طرح منتشر ہوتے ہیں۔

11.2۔ انتشار کے ناپ (Measures of Dispersion)

انتشار کے ناپ معطیات (Data) کے پھیلاؤ کی تقسیم سے متعلق تصور کو پیش کرتے ہیں۔ وسعت (Range)، کورٹیل انحراف (Quartile Deviation) (Q.D)، اوسط انحراف (Mean Deviation) (M.D.) اور معیاری انحراف (Standard Deviation) (S.D) انتشار کے ناپ ہیں۔ آیئے ہم ان میں سے چند کا تفصیلی معائنہ کریں۔

11.2.1۔ وسعت (Range)

وسعت انتشار کی سادہ ترین پیائش ہے۔ اعداد کے ایک سٹ کی وسعت اس سٹ کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمت کا درمیانی فرق ہے۔

وسعت (Range) = سب سے بڑی قیمت - سب سے چھوٹی قیمت

$$= L - S$$

وسعت کا ضریب اس طرح دیا گیا ہے۔ $\dfrac{L-S}{L+S}$

مثال 11.1 43, 24, 38, 56, 22, 39, 45 کی وسعت اور ضریب دریافت کیجئے۔

حل : آیئے، ہم دی ہوئی معطیات کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھیں۔ 22, 24, 38, 39, 43, 45, 56

دی گئی معطیات میں سب سے بڑی قیمت $L = 56$ اور سب سے چھوٹی قیمت $S = 22$ ہے۔

$$\text{وسعت} = L - S$$

$$= 56 - 22 = 34$$

$$\text{وسعت کا ضریب} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$= \frac{56-22}{56+22} = \frac{34}{78} = 0.436$$

مثال 11.2 ایک جماعت میں 13 طلباء کے اوزان 45.8 , 49.8 , 46.2 , 49 , 50.5 , 48.6 , 47.5 , 42.5 , 42.4 ,46.9 ,44.7 , 48 , 43.2 ، ہیں۔ وسعت اور وسعت کا ضریب دریافت کیجئے۔

حل : دی گئی معطیات کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھیں

42.4, 42.5, 43.2, 44.7, 45.8, 46.2, 46.9, 47.5, 48, 48.6, 49, 49.8, 50.5

سب سے بڑی قیمت $L = 50.5$ اور سب سے چھوٹی قیمت $S = 42.4$ ہے۔

$$\text{وسعت} = L - S$$

$$= 50.5 - 42.4 = 8.1$$

$$\text{وسعت کا ضریب} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{50.5-42.4}{50.5+42.4} = \frac{8.1}{92.9}$$

$$= 0.087$$

مثال 11.3

معطیات کے ایک گروہ میں سب سے بڑی قیمت 7.44 ہے۔ اگر وسعت 2.26 ہو تو اس گروہ کی سب سے چھوٹی قیمت دریافت کیجئے۔

حل : سب سے چھوٹی قیمت - سب سے بڑی قیمت = وسعت

$\Rightarrow$ 7.44 – سب سے چھوٹی قیمت = 2.26

چنانچہ سب سے چھوٹی قیمت $= 7.44 - 2.26 = 5.18$

11.2.2 معیاری انحراف (Standard Deviation)

انتشار کی پیائش کا بہتر طریقہ یہ ہے کہ انہیں اوسط سے پہلے ہر ایک معطیہ اور اوسط کے درمیان فرق کا مربع کریں۔ انتشار کی اس پیائش کو اختلاف (Variance) کہتے ہیں۔ اور اختلاف کا مثبت جذر المربع معیاری انحراف (S.D) کہلاتا ہے۔ اختلاف ہمیشہ مثبت ہے۔

لفظ معیاری انحراف کو 1894 میں سب سے پہلے کارل پیرسن نے گاس (Gauss) کے استعمال کردہ لفظ ''غلط اوسط'' (Mean error) کے متبادل کے طور پر استعمال کیا۔

معیاری انحراف کو معطیات کی طرح مساوی اکائیوں میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں یہ ظاہر کرنا ہے کہ اوسط سے کتنا اختلاف ہے۔ ایک چھوٹا معیاری انحراف یہ ظاہر کرتا ہے کہ معطیات کو نقاط اوسط سے زیادہ قریب ہوتے ہیں، جب کہ ایک بڑا معیاری انحراف یہ ظاہر کرتا ہے کہ معطیات قیمتوں کی بہت زیادہ حد تک پھیلے ہوئے ہیں۔

ہم پھیلاؤ کے اوسط اور معیاری انحراف کو بالترتیب $\overline{x}$ اور σ سے تعبیر کرتے ہیں۔ معطیات کے انحصار پر ہم معیاری انحراف (معطیات کو صعودی یا نزولی ترتیب دینے کے بعد) مختلف طریقوں سے ذیل کے ضابطوں کے استعمال سے محسوب کرتے ہیں۔

(ثبوت نہیں دیئے گئے ہیں)

بتدریج انحراف کا طریقہ	مفروضہ اوسط کا طریقہ	حقیقی اوسط کا طریقہ	راست طریقہ	معطیات
$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$ $d = \frac{x - A}{c}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ $d = x - A$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ $d = x - \overline{x}$	$\sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$	غیر گروہ شدہ
$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$		گروہ شدہ

غور کریں

n اشیاء (اعداد) کے مجموعہ کے لئے ہمارے پاس ہمیشہ ہے

$\sum \overline{x} = n\overline{x}$ اور $\sum x = nx$, $\sum (x - \overline{x}) = 0$

(i) راست طریقہ (Direct Method)

اگر دئے گئے معطیات کے مربع آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں تو یہ طریقہ ہم استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 11.4:

8 طلباء کے ذریعہ ایک مہینے میں پڑھے گئے کتابوں کی تعداد اس طرح ہے۔ 2, 5, 8, 11, 14, 6, 12, 10

ان معطیات کے لئے معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

حل:

x	x^2
2	4
5	25
6	36
8	64
10	100
11	121
12	144
14	196
$\sum x = 68$	$\sum x^2 = 690$

$n = 8$ یہاں معطیات کی تعداد n ہے۔

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{690}{8} - \left(\dfrac{68}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{8625 - (8.5)^2}$

$= \sqrt{8625 - 7225}$

$= \sqrt{14} \simeq 3.74$

(ii) حقیقی اوسط کا طریقہ

یہ طریقہ اس وقت استعمال کیا جا سکتا ہے جب کہ اوسط ایک کسر نہیں ہے۔

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}}$ یا $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d}{n}}$ ، جہاں $d = x - \overline{x}$

مثال 11.5

ایک جماعت میں عام معلومات (general knowledge) میں ایک ٹسٹ لیا گیا۔ 40 مارکس سے 6 طلباء کے لئے مارکس 20, 14, 16, 30, 21 اور 25 تھے۔ معطیات کے لئے معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

حل:

اب حسابی اوسط $A.M. = \dfrac{\sum x}{n} = \dfrac{20 + 14 + 16 + 30 + 21 + 25}{6}$

$\Longrightarrow \overline{x} = \dfrac{126}{6} = 21.$

آیئے اب ہم جدول تیار کریں۔

x	$d = x - \overline{x}$	d^2
14	-7	49
16	-5	25
20	-1	1
$\boxed{21}$	0	0
25	4	16
30	9	81
$\sum x = 126$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 172$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{172}{6}}$

$= \sqrt{28.67}$

لہٰذا $\sigma \simeq 5.36$

(iii) فرضی اوسط کا طریقہ Assumed mean method

جب دی گئی معطیات کا اوسط ایک سالم عدد نہیں ہے۔ ہم فرضی اوسط کا طریقہ استعمال کر کے معیاری انحراف محسوب کرتے ہیں۔ ہم ایک مناسب قیمت اس طرح منتخب کرتے ہیں کہ فرض $x-A$ تمام چھوٹے اعداد ہوں ممکن حد تک سالم اعداد ہوں۔ یہاں A فرضی اوسط ہے جو اوسط سے قریب سمجھا جاتا ہے۔

$d = x-A$ کے استعمال سے ہم انحراف محسوب کرتے ہیں.

اب میعاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}.$

> **غور کریں**
>
> فرضی اوسط کا طریقہ اور مرحلاتی انحراف کا طریقہ، راست طریقہ کی صرف مختصر شکلیں ہیں۔

مثال 11.6

اعداد 62, 58, 53, 50, 63, 52,55 کا معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

حل : آیئے ہم $A=55$ لیں جو کہ فرضی اوسط ہے اور ذیل کی جدول تیار کریں۔

x	$d = x-A$ $= x-55$	d^2
50	-5	25
52	-3	9
53	-2	4
55	0	0
58	3	9
62	7	49
63	8	64
	$\sum d = 8$	$\sum d^2 = 160$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \frac{64}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{1056}{49}}$$

$$= \frac{32.49}{7}$$

$\therefore$ معیاری انحراف $\sigma \simeq 4.64$

(iv) مرحلاتی انحراف کا طریقہ Step deviation method

جب قیمتیں بڑی ہوں اور ایک مشترک جزو ضربی رکھتی ہوں تو اس وقت اس طریقہ کو استعمال کر کے میعاری انحراف دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم ایک مفروضی اوسط A منتخب کرتے ہیں اور $d = \frac{x-A}{c}$ کے استعمال سے d محسوب کرتے ہیں۔ یہاں $x-A$ کی تمام قیمتوں کے لئے c ایک مشترک جزو ضربی ہے۔

ہم یہ ضابطہ استعمال کرتے ہیں۔ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c.$

مثال 11.7 ایک حساب کے امتحان میں 10 طلباء کے حاصل کردہ مارکس اس طرح ہیں۔

80, 70, 40, 50, 90, 60, 100, 60, 30, 80 ان کے لئے معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

حل :

ہم غور کرتے ہیں کہ تمام مشاہدات کے لئے مشترک جزوِ ضربی 10 ہے۔ $A=70$ کو فرضی اوسط لیں۔

یہاں اشیاء کی تعداد $n=10$ ہے۔ $c=10$ لیں، $d=\dfrac{x-A}{10}$ اور ذیل کی جدول تیار کریں۔

x	$d=\dfrac{x-70}{10}$	d^2
30	-4	16
40	-3	9
50	-2	4
60	-1	1
60	-1	1
$\boxed{70}$	0	0
80	1	1
80	1	1
90	2	4
100	3	9
	$\sum d=-4$	$\sum d^2=46$

اب $$\sigma=\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}\times c$$

$$=\sqrt{\frac{46}{10}-\left(\frac{-4}{10}\right)^2}\times 10$$

$$=\sqrt{\frac{46}{10}-\frac{16}{100}}\times 10=\sqrt{\frac{460-16}{100}}\times 10$$

$\therefore$ معیاری انحراف $\sigma\simeq 21.07$

مذکورہ بالا چار طریقے جیسے راست طریقہ، حقیقی اوسط کا طریقہ، فرضی اوسط کا طریقہ اور مرحلاتی انحراف کا طریقہ، ان میں سے کسی بھی ایک طریقہ سے معطیات کے ذخیرہ کا معیاری انحراف حاصل کر سکتے ہیں۔

یکساں معطیات کے لئے جیسے توقع کیا گیا، ویسے طریقے سے σ کے لئے مختلف جوابات نہیں دے سکتے۔ اسی حقیقت کو ذیل کی مثال میں سمجھایا گیا ہے۔ طلباء کو یہ نصیحت دی جاتی ہے کہ وہ ذیل کے طریقوں سے کسی ایک طریقہ کو اپنائیں۔

نتائج (Results) :

(i) ایک سلسلے کا معیاری انحراف نہیں بدلتا ہے اگر ہر معطیہ کے ساتھ ایک ہی مقدار جمع کریں یا خارج کریں۔

(ii) ایک معطیات کے ذخیرہ کی ہر قیمت کو ایک مستقل غیر صفری k سے ضرب یا تقسیم کرنے پر نئے معطیات کا معیاری انحراف بھی k گنا ضرب یا تقسیم پذیر ہوتا ہے۔

مثال 11.8 3, 5, 6, 7 معطیات کا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔ پھر ہر ایک معطیہ کے ساتھ 4 جمع کیجئے اور نیا معیاری انحراف معلوم کیجئے

حل : آیئے ہم دی ہوئی معطیات کی ہر رقم کے ساتھ 4 جمع کریں

اور نئی معطیات 7,9,10,11 حاصل کرلیں۔

A=10 لیجئے

x	$d=x-10$	d^2
7	-3	9
9	-1	1
$\boxed{10}$	0	0
11	1	1
	$\Sigma d=-3$	$\Sigma d^2=11$

معیاری انحراف $\sigma_1=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}-\left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{11}{4}-\left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma_1=\sqrt{\frac{11}{4}-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{35}}{4}$

دیے گئے معطیات 3, 5, 6, 7

A=6 لیجئے

x	$d=x-6$	d^2
3	-3	9
5	-1	1
$\boxed{6}$	0	0
7	1	1
	$\Sigma d=-3$	$\Sigma d^2=11$

معیاری انحراف $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}-\left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{11}{4}-\left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma=\sqrt{\frac{11}{4}-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{35}}{4}$

اوپر کی مثال میں ہر رقم کے ساتھ ایک مستقل رقم 4 جمع کرنے پر بھی معیاری انحراف نہیں بدلتا ہے۔

مثال 11.9 40, 42 اور 48 کا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔ اگر ہر ایک قیمت کو 3 سے ضرب دیں تو نیا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

حل :

جب قیمتوں کو 3 سے ضرب دیں تو ہمیں 120, 126, 144 حاصل ہوتا ہے فرضی اوسط A=132 لیجئے۔

x	$d=x-132$	d^2
120	-12	144
126	-6	36
144	12	144
	$\Sigma d=-6$	$\Sigma d^2=324$

$=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}-\left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{324}{3}-\left(\frac{-6}{3}\right)^2}$

معیاری انحراف $\sigma_1=\sqrt{\frac{312}{3}}=\sqrt{104}$

آیئے ہم دی ہوئی معطیات 40, 42, 48 پر غور کریں اور σ دریافت کریں۔

A=44 فرضی اوسط لیں

x	$d=x-44$	d^2
40	-4	16
42	-2	4
48	4	16
	$\Sigma d=-2$	$\Sigma d^2=36$

$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}-\left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{36}{3}-\left(\frac{-2}{3}\right)^2}$

معیاری انحراف $\sigma=\frac{\sqrt{104}}{3}$

اوپر کی مثال میں جب ہر ایک قیمت کو 3 سے ضرب دیا گیا تو معیاری انحراف بھی 3 گنا ہو گیا۔

مثال 11.10

پہلے 'n' طبعی اعداد کے لئے معیاری انحراف کا ضابطہ $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ثابت کیجئے۔

حل پہلے 'n' طبعی اعداد $1, 2, 3, \ldots\ldots. n$ ہیں۔

ان کا اوسط $\quad \overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

پہلے n طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع $\quad \sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

اب معیاری انحراف $\quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

$\therefore$ پہلے n طبعی اعداد کا معیاری انحراف $\quad \sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

برائے ذہن نشینی

اس بات کو نوٹ کرنے میں دلچسپ معلوم ہوگی کہ

d عام فرق رکھنے والے ایک A.P. کے n متواتر اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

$i, i+1, i+2, \ldots, i+n$ کا معیاری انحراف S.D. $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, i \in \mathbb{N}$

کسی بھی n متواتر جفت اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in \mathbb{N}$

کسی بھی n متواتر طاق اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in \mathbb{N}$

مثال 11.11

پہلے دس طبعی اعداد کا معیاری انحراف دریافت کیجیے۔

حل :

$$\text{پہلے 'n' طبعی اعداد کا معیاری انحراف} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

$$\text{پہلے 10 طبعی اعداد کا معیار انحراف} = \sqrt{\frac{10^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{100-1}{12}} \simeq 2.87$$

گروہی معطیات کے لئے معیاری انحراف

(i) حقیقی اوسط کا طریقہ : (Actual mean Method)

جُدا معطیات (Discrete data) میں جب حسابی اوسط سے انحراف لیا جاتا ہے معیاری انحراف ضابطے کے استعمال سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}} \qquad \text{جہاں } d = x - \overline{x}$$

مثال 11.12

ذیل کی جدول 48 طالب علموں کے ایک حساب کے کوئز (Quiz) میں لئے گئے مارکس کو ظاہر کرتی ہے۔

معطیات x	6	7	8	9	10	11	12
تعدد f	3	6	9	13	8	5	4

آیئے ہم دیئے ہوئے معطیات کے استعمال سے ذیل کی جدول تیار کریں۔

x	f	fx	$d = x - \overline{x}$ $= x - 9$	fd	fd^2
6	3	18	-3	-9	27
7	6	42	-2	-12	24
8	9	72	-1	-9	9
$\boxed{9}$	13	117	0	0	0
10	8	80	1	8	8
11	5	55	2	10	20
12	4	48	3	12	36
	$\sum f=48$	$\sum fx=432$	$\sum d=0$	$\sum fd=0$	$\sum fd^2=124$

$$\text{حسابی اوسط} \qquad \overline{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{432}{48} = 9.$$

$$\text{معیاری انحراف} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}}$$

$$\sigma = \sqrt{2.58} \simeq 1.61$$

(ii) فرضی اوسط کا طریقہ (Assumed mean method)

جب فرضی اوسط سے انحراف لیا جاتا ہے، معیاری انحراف معلوم کرنے کے لئے ضابطہ ہے

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2}$$

جہاں $d = x - A$.

مثال 11.13

ذیل کی معطیات کے لئے معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

x	70	74	78	82	86	90
f	1	3	5	7	8	12

حل

آیئے فرضی اوسط A=82 لیں۔

x	f	$d = x - 82$	fd	fd^2
70	1	−12	−12	144
74	3	−8	−24	192
78	5	−4	−20	80
$\boxed{82}$	7	0	0	0
86	8	4	32	128
90	12	8	96	768
	$\sum f = 36$		$\sum fd = 72$	$\sum fd^2 = 1312$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1312}{36} - \left(\frac{72}{36}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328}{9} - 2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328 - 36}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{292}{9}} = \sqrt{32.44}$$

$$\therefore \quad \sigma \simeq 5.7$$

مثال 11.14

ذیل کی جدول کے لئے اختلاف معلوم کیجئے۔

درجاتی وقفہ	3.5-4.5	4.5-5.5	5.5-6.5	6.5-7.5	7.5-8.5
تعدد	9	14	22	11	17

حل : آیئے فرضی اوسط $A = 6$ لیں۔

درجاتی وقفہ	x وسطی قیمت	f	$d = x - 6$	fd	fd^2
3.5-4.5	4	9	-2	-18	36
4.5-5.5	5	14	-1	-14	14
5.5-6.5	$\boxed{6}$	22	0	0	0
6.5-7.5	7	11	1	11	11
7.5-8.5	8	17	2	34	68
		$\sum f = 73$		$\sum fd = 13$	$\sum fd^2 = 129$

اب اختلاف $\sigma^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2$

$$= \frac{129}{73} - \left(\frac{13}{73}\right)^2 = \frac{129}{73} - \frac{169}{5329}$$

$$= \frac{9417 - 169}{5329} = \frac{9248}{5329}$$

اختلاف $\sigma^2 \simeq 1.74$

(iii) مرحلاتی انحراف کا طریقہ (Step Deviation Method)

مثال 11.15

درجہ ذیل جدول میں انٹرنیشنل فٹ بال میچ میں 71 بہترین کھلاڑیوں کے بنائے گئے گول کو دیا گیا ہے۔معطیات کے لئے معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

درجاتی وقفہ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
تعداد	8	12	17	14	9	7	4

حل : $A=35$، کو چوتھے کالم میں اور تمام مشترک اجزاء کو $c=10$ لیجئے۔

درجاتی وقفہ	x وسطی قیمت	f	$x-A$	$d = \frac{x-A}{c}$	fd	fd^2
0–10	5	8	–30	-3	-24	72
10–20	15	12	–20	-2	-24	48
20–30	25	17	–10	-1	-17	17
30–40	$\boxed{35}$	14	0	0	0	0
40–50	45	9	10	1	9	9
50–60	55	7	20	2	14	28
60–70	65	4	30	3	12	36
		$\sum f = 71$			$\sum fd = -30$	$\sum fd^2 = 210$

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

$$= \sqrt{\frac{210}{71} - \left(\frac{-30}{71}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{14910 - 900}{5041}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{14010}{5041}} \times 10 = \sqrt{2.7792} \times 10$$

معیاری انحراف $\sigma \simeq 16.67$

مثال 11.16

کسی تار کے 40 ٹکڑوں کی لمبائیاں، سنٹی میٹر تک درست کی گئی ہیں۔ اختلاف محسوب کیجیے۔

لمبائی (سم)	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
ٹکڑوں کی تعداد	2	3	8	12	9	5	1

حل : فرضی اوسط A=35.5 لیں

لمبائی	وسطی قیمت x	ٹکڑوں کی تعداد (f)	$d = x - A$	fd	fd^2
1-10	5.5	2	-30	-60	1800
11-20	15.5	3	-20	-60	1200
21-30	25.5	8	-10	-80	800
31-40	$\boxed{35.5}$	12	0	0	0
41-50	45.5	9	10	90	900
51-60	55.5	5	20	100	2000
61-70	65.5	1	30	30	900
		$\sum f = 40$		$\sum fd = 20$	$\sum fd^2 = 7600$

اختلاف $\sigma^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2 = \dfrac{7600}{40} - \left(\dfrac{20}{40}\right)^2$

$$= 190 - \frac{1}{4} = \frac{760 - 1}{4} = \frac{759}{4}$$

$\therefore \quad \sigma^2 = 189.75$

11.2.3 اختلاف کا ضریب (Coefficient of Variation)

اختلاف کے ضریب کی تعریف اس طرح سے کی جا سکتی ہے۔

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

جہاں σ معیاری انحراف اور $\bar{x}$ دی گئی معطیات کا اوسط ہے۔ اس کو نوعی یا اضافی معیاری انحراف (Relative S.D) بھی کہتے ہیں۔

برائے ذہن نشینی

(i) دو یا مزید معطیات کے ذخیرہ کی مستقل پذیری کا موازنہ کرنے میں اختلاف کا ضریب کارآمد ہے۔
(ii) جب اختلاف کا ضریب بڑا ہو تو دی گئی معطیات کم مستقل پذیر ہوں گے۔
(iii) جب اختلاف کا ضریب چھوٹا ہو تو دی گئی معطیات زیادہ مستقل پذیر ہوں گے۔

مثال 11.17

ذیل کی معطیات کے اختلاف کا ضریب دریافت کیجئے۔ 18, 20, 15, 12, 25

حل : آیئے ہم دئے گئے معطیات کا حسابی اوسط (A.M) محسوب کریں۔

$$\text{A.M}\ \ \bar{x} = \frac{12+15+18+20+25}{5}$$
$$= \frac{90}{5} = 18.$$

x	$d = x - 18$	d^2
12	-6	36
15	-3	9
$\boxed{18}$	0	0
20	2	4
25	7	49
	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 98$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{98}{5}}$$
$$= \sqrt{19.6} \simeq 4.428$$

$\therefore$ اختلاف کا ضریب $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{4.428}{18} \times 100 = \frac{442.8}{18}.$$

$\therefore$ اختلاف کا ضریب $= 24.6$

مثال 11.18

ذیل میں 5 کرکٹ میچوں میں 2 بلے بازوں کے بنائے گئے رَن کو دیا گیا ہے۔ دریافت کیجئے کہ رنوں کے حاصل کرنے میں کون زیادہ مستقل ہے۔

بلے باز A	38	47	34	18	33
بلے باز B	37	35	41	27	35

حل :

بلے باز B

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
27	-8	64
35	0	0
35	0	0
37	2	4
41	6	36
175	0	104

$$\bar{x} = \frac{175}{5} = 35$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{104}{5}} = \sqrt{20.8} \simeq 4.6$$

اختلاف کا ضریب $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{4.6}{35} \times 100 = \frac{460}{35} = \frac{92}{7} = 13.14$

بلے باز B کے حاصل کردہ رنوں کے اختلاف کا ضریب $= 13.14$ (2)

بلے باز A

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	-16	256
33	-1	1
34	0	0
38	4	16
47	13	169
170	0	442

یہاں پر $\bar{x} = \frac{170}{5} = 34$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{442}{5}} = \sqrt{88.4} \simeq 9.4$$

اختلاف کا ضریب $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{9.4}{34} \times 100 = \frac{940}{34} = 27.65$

بلے باز A کے حاصل کردہ رنوں کے اختلاف کا ضریب $= 27.65$ (1)

(1) اور (2) سے بلے باز B کے اختلاف کا ضریب A کے اختلاف کے ضریب سے کم ہے۔

چنانچہ بلے باز B رنوں کے حاصل کرنے میں A سے زیادہ مستقل ہے۔

مثال 11.19

30 اشیاء کا اوسط 18 ہے اور ان کا معیاری انحراف 3 ہے۔ تمام اشیاء کا حاصل جمع (مجموعہ) اور مزید ان کے مربعوں کا مجموعہ دریافت کیجئے۔

حل : 30 اشیاء کا اوسط $\bar{x} = 18$ ہے۔

$$\left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n}\right)$$

30 اشیاء کا حاصل جمع, $\sum x = 30 \times 18 = 540$

معیاری انحراف, $\sigma = 3$

اب , $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 18^2 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 324 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 9720 = 270$$

$$\sum x^2 = 9990$$

$\therefore \quad \sum x = 540$ اور $\sum x^2 = 9990.$

مثال 11.20

20 اشیاء کا اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 40 اور 15 ہے۔ دوبارہ جانچ کرنے پر پتہ چلا کہ آئٹم 43 کو غلطی سے 53 لکھا گیا ہے۔ درست اوسط اور معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

حل : پہلے درست اوسط معلوم کریں

20 اشیاء کا اوسط $\quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 40$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x}{20} = 40$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x = 20 \times 40 = 800$$

درست کردہ $\sum x = 800 -$ (درست قیمت) + (غلط قیمت)

اب درست کردہ $\sum x = 800 - 53 + 43 = 790.$

$\therefore$ درست اوسط $= \frac{790}{20} = 39.5$

اختلاف $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = 225$ (دیا گیا ہے)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{20} - 40^2 = 225$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 32000 = 225 \times 20 = 4500$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 32000 + 4500 = 36500$$

درست کردہ $\sum x^2 = 36500 -$ (درست قیمت)^2 + (غلط قیمت)^2

درست کردہ $\sum x^2 = 36500 - 53^2 + 43^2 = 36500 - 2809 + 1849$

$= 36500 - 960 = 35540.$

اب درست کردہ $\sigma^2 = \frac{\text{درست کردہ } \sum x^2}{n} - (\text{درست کردہ اوسط})^2$

$= \frac{35540}{20} - (39.5)^2$

$= 1777 - 1560.25 = 216.75$

درست کردہ $\sigma = \sqrt{216.75} \simeq 14.72$

$\therefore$ چنانچہ درست اوسط $= 39.5$ اور درست معیاری انحراف $14.72 \simeq$ ہے۔

مثال 11.21

ایک معطیات کے ذخیرہ میں، اگر $\sum(x^2-9) = 82$ ، $\sum x = 35, n = 5,$ ہو تو $\sum x^2$ اور $\sum(x-\overline{x})^2$ دریافت کیجئے۔

حل دیا گیا ہے کہ $\sum x = 35$ اور $n = 5$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7.$$

$\sum x^2$ آیئے ہم دریافت کریں۔

اب $\sum(x-9)^2 = 82$

$$\implies \quad \sum(x^2 - 18x + 81) = 82$$

$$\implies \quad \sum x^2 - \left(18\sum x\right) + \left(81\sum 1\right) = 82$$

$$\implies \quad \sum x^2 - 630 + 405 = 82 \qquad \because \sum x = 35 \text{ اور } \sum 1 = 5$$

$$\implies \quad \sum x^2 = 307.$$

$\sum(x-\overline{x})^2$ دریافت کرنے کے لئے آیئے ہم غور کریں

$$\sum(x-9)^2 = 82$$

$$\implies \quad \sum(x-7-2)^2 = 82$$

$$\implies \quad \sum[(x-7)-2]^2 = 82$$

$$\implies \quad \sum(x-7)^2 - 2\sum[(x-7)\times 2] + \sum 4 = 82$$

$$\implies \quad \sum(x-\overline{x})^2 - 4\sum(x-\overline{x}) + 4\sum 1 = 82$$

$$\implies \quad \sum(x-\overline{x})^2 - 4(0) + (4\times 5) = 82 \qquad \because \sum 1 = 5 \text{ اور } \sum(x-\overline{x}) = 0$$

$$\implies \quad \sum(x-\overline{x})^2 = 62$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 307 \text{ اور } \sum(x-\overline{x})^2 = 62.$$

مثال 11.22

دو سلسلوں کے اختلاف کے ضریب 58 اور 69 ہیں ان کے معیاری انحراف 21.2 اور 15.6 ہیں۔ ان کے حسابی اوسط کیا ہیں؟

حل : ہم کو معلوم ہے کہ

اختلاف کا ضریب $C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100.$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$$

پہلے سلسلہ کا حسابی اوسط $\overline{x_1} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100$

$$= \frac{21.2}{58} \times 100 \qquad \because \quad C.V = 58 \text{ اور } \sigma = 21.2$$

$$= \frac{2120}{58} = 36.6$$

$$\text{دوسرے سلسلہ کا حسابی اوسط} = \bar{x}_2 \quad \frac{\sigma}{C.V} \times 100$$

$$= \frac{15.6}{69} \times 100 \qquad \because \quad C.V = 69 \qquad \sigma = 15.6$$

$$= \frac{1560}{69}$$

$$= 22.6$$

پہلے سلسلہ کا حسابی اوسط (A.M) = 36.6 ہے۔ دوسرے سلسلہ کا حسابی اوسط (A.M) = 22.6 ہے۔

مشق 11.1

1) ذیل کے لئے وسعت اور وسعت کا ضریب معلوم کیجئے۔

(i) 59, 46, 30, 23, 27, 40, 52,35, 29

(ii) 41.2, 33.7, 29.1, 34.5, 25.7, 24.8, 56.5, 12.5

2) معطیات کے مجموعہ کی سب سے چھوٹی قیمت 12 اور وسعت 59 ہے۔ معطیات مجموعہ کی سب سے بڑی قیمت دریافت کیجئے۔

3) 50 پیمائشوں میں سب بڑی 3.84 Kg. ہے۔ اگر وسعت 0.46 Kg. ہو تو سب سے چھوٹی قیمت دریافت کیجئے۔

4) 20 مشاہدات کا معیاری انحراف $\sqrt{5}$ ہے ہر مشاہدے کو اگر 2 سے ضرب دیں تو نتیجہ سے حاصل ہونے والے مشاہدات کا معیاری انحراف اور اختلاف معلوم کیجئے۔

5) پہلے 13 طبعی اعداد کا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

6) ذیل کی معطیات کے لئے معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

(i) 10, 20, 15, 8, 3, 4 (ii) 38, 40, 34 ,31, 28, 26, 34

7) معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

x	3	8	13	18	23
f	7	10	15	10	8

8) ذیل کی جدول میں 200 طلباء کے لئے ایک بک فیر (Book Fair) میں خریدی ہوئی کتابوں کی تعداد دی گئی ہے۔

کتابوں کی تعداد	0	1	2	3	4
طلباء کی تعداد	35	64	68	18	15

معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

9) دی گئی معطیات کے لئے اختلاف محسوب کیجئے۔

x	2	4	6	8	10	12	14	16
f	4	4	5	15	8	5	4	5

10) ذیل کی جدول میں لوگوں کی ایک جماعت کا پیدل سڑک پار کرنے کا وقفہ (سکنڈوں میں) دیا گیا ہے۔

وقفہ (سکنڈوں میں)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
لوگوں کی تعداد	4	8	15	12	11

اختلاف اور معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

11) 45 مالکان مکان کے ایک گروپ نے اپنی گلی کے پودے لگانے کے لئے چندہ اکھٹا کیا۔ جمع کی گئی رقم ذیل کی جدول میں دکھائی گئی ہے

رقم (₹)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
تعداد مالکان مکان	2	7	12	19	5

اختلاف اور معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

12) ذیل کی معطیات کے لئے اختلاف دریافت کیجئے۔

درجاتی وقفہ	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
تعداد	15	25	28	12	12	8

13) 100 اشیاء کا وزن 48 اور ان کا معیاری انحراف 10 ہے۔ تمام اشیاء کا مجموعہ اور تمام اشیاء کے مربعوں کا مجموعہ دریافت کیجئے۔

14) 20 معطیات کا اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 10 اور 2 دریافت کیا گیا۔ چھان بین کے دوران پتہ چلا کہ مشاہدہ 12 کو غلطی سے 8 درج کیا گیا ہے۔ درست اوسط اور درست معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

15) اگر $n = 10$ ، $\bar{x} = 12$ اور $\sum x^2=1530$ ہو تو اختلاف کا ضریب محسوب کیجئے۔

16) ذیل کی معطیات کے لئے اختلاف کا ضریب محسوب کیجئے۔ 20, 18, 32, 24, 26

17) اگر معطیات کے ایک ذخیرہ کا اختلاف کا ضریب 57 اور اس کا معیاری انحراف SD 6.84 ہے تو اوسط دریافت کیجئے۔

18) 100 امیدواروں کے ایک گروہ کی اوسط اونچائی 163.8 سمر اور اختلاف کا ضریب 3.2 ہے اُن کی اونچائیوں کا معیاری انحراف کیا ہے؟

19) دیا گیا ہے $\sum x=99$ ، $n=9$ اور $\sum(x-10)^2 =79$ ، $\sum x^2$ اور $\sum(x-\bar{x})^2$ دریافت کیجئے۔

20) ایک جماعت میں دو طلباء A اور B کے حاصل کردہ مارکس دیے گئے ہیں۔

A	58	51	60	65	66
B	56	87	88	46	43

دریافت کیجئے کہ کون زیادہ مستقل ہے۔

مشق 11-2

صحیح جواب منتخب کیجئے۔

1۔ پہلے 10 عدد اولی 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 کی وسعت ہے۔

(A) 28 (B) 26 (C) 29 (D) 27

2۔ معطیات کی سب سے چھوٹی قیمت 14.1 اور وسعت 28.4 ہے۔سب سے بڑی قیمت ہے

(A) 42.5 (B) 43.5 (C) 42.4 (D) 42.1

3۔ معطیات کے ذخیرہ کی سب سے بڑی قیمت 72 اور سب سے چھوٹی قیمت 28 ہے اس کے وسعت کا ضریب ہے۔

(A) 44 (B) 0.72 (C) 0.44 (D) 0.28

4۔ 11 معطیات کے ذخیرہ کے لئے $\Sigma x=132$ ہو تو حسابی اوسط ہے۔

(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 13

5۔ کسی بھی 'n' معطیات کے ذخیرہ کے لئے $\Sigma(x-\overline{x}) =$

(A) Σx (B) $\overline{x}$ (C) $n\overline{x}$ (D) 0

6۔ کسی بھی n اعداد کے مجموعہ کے لئے $(\Sigma x) - \overline{x} =$

(A) $n\overline{x}$ (B) $(n-2)\overline{x}$ (C) $(n-1)\overline{x}$ (D) 0

7۔ اگر x,y,z کا معیاری انحراف t ہے تو x+5, y+5, z+5 کا معیاری انحراف ہوگا۔

(A) $\frac{t}{3}$ (B) $t+5$ (C) t (D) $x\,y\,z$

8۔ کسی معطیہ کے گروہ کا معیاری انحراف 1.6 ہے تو اس کا اختلاف

(A) 0.4 (B) 2.56 (C) 1.96 (D) 0.04

9۔ ایک معطیات کے کسی مجموعہ کا اختلاف 12.25 ہے تو اس کا S.D. معیاری انحراف

(A) 3.5 (B) 3 (C) 2.5 (D) 3.25

10۔ پہلے 11 طبعی اعداد کا اختلاف

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 10

11۔ 10, 10, 10, 10, 10 کا اختلاف

(A) 10 (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 0

12۔ اگر 14,18,22, 26, 30 کا اختلاف 32 ہو تو 28, 36, 44, 52, 60 کا اختلاف

(A) 64 (B) 128 (C) $32\sqrt{2}$ (D) 32

13۔ کسی معطیات کے مجموعہ کا معیاری انحراف $2\sqrt{2}$ ہے۔ اگر ہر ایک قیمت کو 3 سے ضرب دیا جائے تو نئے معطیات کا معیاری انحراف

(A) $\sqrt{12}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$

14۔ $\sum(x-\overline{x})^2 = 48,\ \overline{x} = 20$ اور $n = 12$ دیا گیا ہے۔ اختلاف کا ضریب

(A) 25 (B) 20 (C) 30 (D) 10

15۔ کسی معطیہ کا اوسط اور معیاری انحراف 48 اور 12 ہے۔ اس کے اختلاف کا ضریب

(A) 42 (B) 25 (C) 28 (D) 48

یاد رکھنے کے نکات

- (i) بڑے مشاہدے اور چھوٹے مشاہدے کا فرق L – S = وسعت کہلائے گا۔
  (ii) وسعت کا ضریب $\dfrac{L-S}{L+S}$
- کسی غیر گروہی معطیات کے لئے معیاری انحراف
  (i) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n}}$ جس میں $d = x - \overline{x}$ اور $\overline{x}$ اوسط ہے۔
  (ii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d}{n}\right)^2}$ جس میں $d = x - A$ اور A مفروضہ اوسط ہے۔
- کسی گروہی معطیات کے لئے معیاری انحراف
  (i) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$ جس میں $d = x - \overline{x}$ اور $\overline{x}$ اوسط ہے۔
  (ii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$ جس میں $d = x - A$ اور A مفروضہ اوسط ہے۔
- جب ہر ایک قیمت میں کسی مستقل کی جمع یا تفریق کی جاتی ہے تو معطیات کے مجموعہ کا معیاری انحراف میں تبدیلی نہیں آتی۔
- کسی معطیہ کے مجموعہ کا معیاری انحراف k قیمت سے ضرب یا تقسیم ہوگا اگر اس معطیہ کے ہر ایک شئے کو k سے ضرب یا تقسیم دیا جاتا ہے۔
- پہلے n طبعی اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$
- معیاری انحراف کا مربع اختلاف کہلاتا ہے۔
- اختلاف کا ضریب $C.V. = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$ ہے۔ اس کو دو یا دو سے زیادہ معطیات کے مجموعہ کی مستقل پذیری معلوم کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

12

- تعارف
- قدیم تعارف
- جمع کا مسئلہ

امکان یا احتمال

PROBABILITY

It is remarkable that a science which began with the consideration of games of chance should have become the most important object of human knowledge.

- P.D. Laplace

12.1۔ تعارف

روزمرہ کی زندگی میں ہمیں دکھائی دینے والی تقریباً ہر شئے کا انحصار امکان پر ہے ۔واقعات جیسے زلزلے، طوفان، سونامی، بجلی کا گرنا، وباؤں کا پھوٹ پڑنا .... وغیرہ کی پیش گوئی ناممکن ہے۔ان میں سے اکثر واقعات اچانک پیش آتے ہیں اور انسانیت کا بھاری نقصان کرتے ہیں۔اس سے قبل جو حادثات پیش آئے ہیں، اگر ان واقعات کے ظہور ہونے کی بنیاد پر ہم منطقی طریقہ پر نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں تو ہم انسانیت کو ایسی تباہی سے بچانے کے اقدامات کرسکتے ہیں۔اس طرح کی قبل از وقت پیش گوئی کرنے کے لئے ہمیں امکان کے نظریہ کا مطالعہ کرنا ہوگا۔

1654 میں ایک جواری ''شوالیر ڈے میرے'' نے ایک تنازعہ کھڑا کرکے اس کا حل ڈھونڈ نکالنے کی غرض سے دو مشہور ریاضی دان بلاس پاسکل (Blasie Pascal) اور پیری ڈی فرمیٹ (Pierre de Fermat) کو خطوط سے رابطہ قائم کیا جس کی وجہ سے امکان کا ریاضی نظریہ وجود میں آیا۔امکان کے ریاضی نظریہ کی ارتقا کے لئے جن ریاضی دانوں نے نمایاں حصّہ ادا کیا، ان کی ایک لمبی فہرست ہے جیسے کرسچین ہگنس (Christian Huggens) (1629-1695)، برنولی (Bernoulli) (1654-1705) ڈی موویر (De Moivre) (1667-1754)، پیری ڈی لیپ لیس (Pierre de Laplace) (1749-1827)، گاز (Gauss) (1777-1855)، پائزان (Poisson) (1781-1845)، چیبی شیو (Chebyshev) (1821-1894)، مارکو (Markov) (1856-1922)۔ 1933 میں روسی ریاضی دان اے۔کولموگورو (A.Kolmogorov) نے موضوعی طریقہ کا تعارف کرایا جو موجودہ امکان کے نظریہ کی بنیاد بنی

امکان ہمیشہ کسی شئے کے واقع ہونے یا نہ ہونے سے تعلق رکھتا ہے۔آیئے اب ہم اصطلاح جیسے سریعی تجربہ، آزمائشی تجربہ، نظری عرصہ اور مختلف قسم کے مواقع کی تعریف کریں۔

پیری ڈی لیپ لیس

(1749-1827)

فرانس

لیپ لیس ہر زمانے کے عظیم ترین سائنس دان کے طور پر یاد کئے جاتے ہیں۔انہیں فرانس کے نیوٹن کے نام سے بھی یاد کیا جاتا ہے۔1812 میں لیپ لیس نے شماریات میں کئی بنیادی نظریات پیش کئے۔انہوں نے حسابی نظام میں امکان کی بنیاد پر استقرائی منطق (Inductive reasoning) کو پیش کیا۔ انہوں نے صرف امکانات کے اصولوں کو پیش کیا جن میں سے ایک یہ ہے۔ ان میں سے ایک یہ ہے ''کسی موقع کے سازگار نتائج اور کل ممکن مواقع کی نسبت کو امکان کہتے ہیں''۔

ریاضی دان جیسے "تجربہ" اور "نتیجہ" جیسے الفاظ کا استعمال وسیع معنوں میں کرتے ہیں۔کسی بھی مشاہدہ کے طریقہ کو تجربہ کہتے ہیں۔نوزائد بچّہ کا لڑکا یا لڑکی ہونے کو نوٹ کرنا، سکّہ کا اچھالنا، مختلف رنگ کے گیند رکھی گئی ایک تھیلی سے ایک گیند کا اٹھانا، کسی دن کسی مخصوص مقام پر ہونے والے حادثات پر غور کرنا وغیرہ تجربہ کی مثالیں ہیں۔

اگر کسی تجربہ کو کرنے سے پہلے ہم اس کے نتائج کی پیش گوئی نہ کرسکیں تو ایسے تجربہ کو **سریعی تجربہ** (Random Experiment) کہتے ہیں۔

باوجود اس کے ہم اِس تجربہ کے تمام ممکن نتائج کو ظاہر کرسکتے ہیں۔

ایک سریعی تجربہ کے تمام ممکن نتائج کے مجموعے کو **نظیری عرصہ** (Sample Space) کہتے ہیں اسکو لفظ 'S' سے ظاہر کرتے ہیں۔

تجربہ کے دُہرانے کو **آزمائشی تجربہ** (Trial) کہتے ہیں۔

نظیری عرصہ S کا ہر ایک تحتی مجموعہ **موقع** (Event) کہلاتا ہے فرض کرو S کا ایک تحتی مجموعہ A ہے۔اگر ایک تجربہ کو کرنے پر ہمیں ایک نتیجہ (Outcome) حاصل ہوتا ہے جو A سے تعلق رکھتا ہے۔ہم یہ کہتے ہیں کہ موقع A حاصل ہوا ہے۔

آیئے اب ہم ذیل کی مثالوں سے سریعی تجربہ، نظیری عرصہ، مواقع کی تشریح کریں۔

تجربات	نظیری عرصہ	چند مواقع
غیر جانب دار سکّہ کا ایک مرتبہ اچھالنا	S = {H,T}	چہرہ کا حاصل ہونا، {H} ایک موقع ہے پشت کا حاصل ہونا {T} دوسرا موقع ہے۔
غیر جانب دار سکّہ کا دو مرتبہ اچھالنا	S={HT,HH,TT,TH}	{HT,HH} اور {TT} چند مواقع ہیں
غیر جانب دار پانسہ کا ایک مرتبہ لڑھکانا	S={1,2,3,4,5,6}	{1,3,5},{2,4,6},{3} اور {6} چند مواقع ہیں

مساوی وقوع پزیری مواقع (Equally Likely Events)

دو یا دو سے زیادہ مواقع **مساوی وقوع پزیری** مواقع کہلاتے ہیں اگر ان کے حاصل ہونے کا امکان مساوی ہو۔

ایک سکہ کو اچھالنے پر، چہرہ یا پشت کا حاصل ہونا مساوی وقوف پذیری مواقع ہیں۔

باہم اخراج کرنے والے مواقع (Mutually Exclusive Events)


Fig. 12.1

دو یا دو سے زیادہ مواقع **باہم اخراج کرنے والے** کہلاتے ہیں اگر ایک موقع کا واقع ہونا، دوسرے موقع کے واقع ہونے کو روکتا ہے۔ایک دوسرے کو خارج کرنے والے مواقع بیک وقت واقع نہیں ہوتے ہیں۔اسطرح اگر A اور B باہم اخراج کرنے والے دو مواقع ہوں تو $A \cap B = \varnothing$ ہے۔

ایک سکّہ کے اچھالنے پر چہرہ کا حاصل ہونا، پشت کے حاصل ہونے کو خارج کرتا ہے۔اس طرح ایک غیر طرفدار پانسہ کو لڑھکانے پر تمام چھ ممکن نتائج ایک دوسرے کو خارج کرنے والے ہیں کیونکہ دو یا دو سے زیادہ نتائج بیک وقت حاصل نہیں ہو سکتے۔

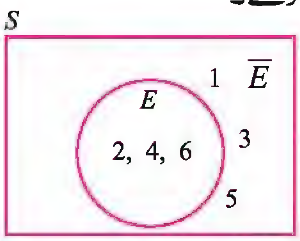


Fig. 12.2

متمم مواقع (Complementary Events)

فرض کرو سریعی تجربہ کا ایک موقع E ہے جس کا نظیری عرصہ S ہے۔ان تمام نتائج کا مجموعہ جو E میں نہ ہو مگر نظیری عرصہ میں ہو، E کا متمم موقع کہلاتا ہے۔اس کو $\overline{E}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ جہاں . $\overline{E} = S - E$ نوٹ کرو کہ E اور $\overline{E}$ ایک دوسرے کو خارج کرنے والے مواقع ہیں۔

کسی پانسے کو پھینکنے پر فرض کرو کہ $E = \{2, 4, 6\}$ ، 2 کے اضعاف کے حاصل ہونے کا موقع ہے۔

تب E کا متمم موقع یہ ہے۔ $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$ (خاکہ 12.2 ملاحظہ کریں)

مکمل مواقع (Exhaustive Events)

مواقع $E_1, E_2, \ldots E_n$ مکمّل مواقع کہلاتے ہیں اگر ان کا اتحاد (Union) نظیری عرصہ S ہو۔

یقینی موقع (Sure Event)

کسی سریعی تجربہ کا موقع یقینی موقع کہلاتا ہے اگر اس تجربہ کے آزمائشی تجربہ میں اُس موقع کا واقع ہونا یقینی ہو۔

مثال کے طور پر، کسی پانسہ کو پھینکنے پر اعداد 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 میں سے کسی ایک کا حاصل ہونا یقینی موقع ہے۔

ناممکن موقع (Impossible Event)

اگر کوئی موقع کسی بھی طرح واقع نہ ہو سکتا ہو تو اس کو ناممکن موقع کہتے ہیں۔اس کو ϕ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر کسی پانسہ کو ایک مرتبہ لڑھکانے سے 7 کا حاصل ہونا ممکن موقع ہے۔

سازگار نتائج (Favourable Outcomes)

وہ نتائج جو مطلوبہ یا پسندیدہ نتائج کے مطابقت میں ہوں، "سازگار نتائج" کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر E ایک طاق عدد حاصل ہونے کا موقع ہے۔اس طرح نتائج 1, 3, 5 موقع E کے سازگار نتائج ہیں۔

غور کریں

اس باب میں ہم صرف ان سریعی تجربات پر بحث کرتے ہیں۔جن کے نتائج کے امکان مساوی ہوں اور نظیری عرصے محدود (Finite) ہوں۔ چنانچہ جب بھی ہم سکے یا پانسہ کا ذکر کرتے ہیں تو انہیں غیر جانب دار ہی کی طرح فرض کیا جائے گا۔

12.2 امکان کی قدیم توضیح (Classical definition of probability):

اگر ایک نظیری عرصہ 'n' نتائج رکھتا ہو اور ان میں موقع A کے m سازگار نتائج ہوں تو ہم اس طرح لکھتے ہیں :

n (S) = n اور n (A) = m موقع A کے امکان کو P(A) سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کی توضیح m کی نسبت n سے کرتے ہیں۔

یعنی $P(A) = \dfrac{\text{A کے سازگار نتائج کی تعداد}}{\text{کل نتائج کی تعداد}}$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}.$$

غور کریں

(i) مندرجہ بالا امکان کی قدیم (کلاسیکی) توضیح ناقابلِ استعمال ہے اگر ممکن نتائج کی تعداد لامحدود ہو اور نتائج کے امکان یکساں طور پر غیر مساوی ہوں۔

(ii) موقع A کا امکان '0' اور '1' کے درمیان ہوتا ہے جن میں دونوں شامل ہیں۔ یعنی $0 \le P(A) \le 1$

(iii) یقینی موقع کا امکان 1 ہے۔ یعنی $P(S) = 1$

(iv) ناممکن موقع کا امکان 0 ہے۔ یعنی $P(\phi) = 0$

(v) اس موقع کا امکان جس میں موقع A واقع نہ ہو اس کو اس طرح دیا جاتا ہے

P (نہیں A) $= P(\overline{A})$ یا $P(A') = \dfrac{n-m}{n} = \dfrac{n}{n} - \dfrac{m}{n}$

$$\Longrightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

مثال 12.1 ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔ ذیل کے حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو : (i) عدد 4 (ii) ایک جفت عدد (iii) 6 کا ایک مفرد جزوِ ضربی (iv) 4 سے بڑا عدد

Fig. 12.3

حل : ایک پانسہ کو پھینکنے پر نظیری عرصہ

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore n(S) = 6$

(i) فرض کرو 4 کے حاصل ہونے کا موقع A ہے

$A = \{4\} \ \therefore n(A) = 1.$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$$

(ii) فرض کرو جفت اعداد حاصل ہونے کا موقع B ہے۔

$B = \{2, 4, 6\} \quad \therefore \ n(B) = 3.$

لہٰذا $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}.$

(iii) فرض کرو 6 کے مفرد جزوِ ضرب حاصل ہونے کا موقع C ہے

$C = \{2,3\} \quad \therefore\ n(C) = 2.$

لہٰذا $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

(iv) فرض کرو 4 سے بڑا عدد حاصل ہونے کا موقع D ہے

$D = \{5,6\} \quad n(D) = 2.$

لہٰذا $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

مثال 12.2

ایک سکّہ کو دو مرتبہ اچھالنے پر ذیل کے حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو

(i) دو سر (ii) کم از کم ایک سر (iii) ٹھیک ایک پشت

حل : ایک سکّہ کو دو مرتبہ اچھالنے پر حاصل ہونے والا نظیری عرصہ $S = \{HH, HT, TH, TT\}.$

$\therefore \quad n(S) = 4.$

(i) فرض کرو دو سر، حاصل ہونے کا موقع A ہے $A = \{HH\}.$

$\therefore\ n(A) = 1$

$\therefore \quad P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}.$

(ii) فرض کرو کم از کم ایک سر کے حاصل ہونے کا موقع B ہے $B = \{HH, HT, TH\}$

لہٰذا $n(B) = 3$

$\therefore \quad P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{4}.$

(iii) فرض ٹھیک ایک پشت حاصل ہونے کا موقع C ہے $C = \{HT, TH\}$

لہٰذا $n(C) = 2$

$\therefore \quad P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}.$

مثال 12.3

ابتدائی بیس طبعی اعداد میں سے ایک سالم عدد کا انتخاب کیا جاتا ہے اس بات کا کیا امکان ہے کہ وہ ایک مفرد عدد (Prime number) ہو۔

حل :

یہاں $S = \{1, 2, 3, ... 20\}$

$\therefore\ n(S) = 20$

فرض کرو کہ مفرد عدد کے منتخب کرنے کا موقع A ہے

تب $\therefore\ A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$n(A) = 8.$

لہٰذا $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}.$

مثال 12.4

35 اشیاء کےنمونہ (Sample) میں سے 7 میں نقص ہے۔ان میں سے ایک شئے کا سرسری طور پر انتخاب کیا جائے تو بغیر نقص کے شئے حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو۔

حل :

اشیاء کی کل تعداد $n(S) = 35$

نقص رکھنے والے اشیاء کی تعداد $= 7$

فرض کرو کہ بغیر نقص کی شئے کے انتخاب کرنے کا موقع A ہے

بغیر نقص کے اشیاء کی تعداد $n(A) = 35 - 7 = 28$

بغیر نقص کی شئے کے منتخب ہونے کا امکان $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{28}{35} = \dfrac{4}{5}.$

مثال 12.5

دو غیر جانب دار پانسے بیک وقت پھینکے جاتے ہیں۔ذیل کے حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(i) حاصلِ جمع 8 (ii) جڑواں عدد (iii) حاصل جمع 8 سے زیادہ ہونے کا امکان

حل : دو پانسے پھینکنے پر حاصل ہونے والا النظیری عرصہ

Fig. 12.4

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\ \}$$

$\therefore\ n(S) = 6 \times 6 = 36$

(i) فرض کرو حاصلِ جمع 8 ہونے کا موقع A ہے

$\therefore \quad A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$

تب $n(A) = 5.$

لہٰذا $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{36}.$

(ii) فرض کرو جڑواں اعداد حاصل ہونے کا موقع B ہے

$\therefore \quad B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.

تب $n(B) = 6.$

$\therefore \quad P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}.$

(iii) فرض کرو حاصل جمع 8 سے زیادہ ہونے کا موقع C ہے

$C = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$n(C) = 10.$

$\therefore \quad P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}.$

مثال 12.6

اچھی طرح اُلٹ پھیر کیے ہوئے 52 تاش کے پتوں سے ایک پتّا اندازاً اٹھایا جاتا ہے۔اس بات کا کیا امکان ہے کہ

(i) ایک راجہ (ii) ایک سیاہ راجہ (iii) ایک پان کا پتّا (iv) ایک ڈائمنڈ 10

52 تاش کے پتوں کی درجہ بندی اس طرح کی جاتی ہے۔

ڈائمنڈ ♦	پھول ♣	دل ♥	پان ♠
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K
13	13	13	13

حل : یہاں $n(S) = 52$

(i) فرض کرو کہ راجہ پتّا کے نکالنے کا موقع A ہے

$\therefore n(A) = 4$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(ii) فرض کرو کہ سیاہ راجہ کارڈ کے نکالنے کا موقع B ہے

$\therefore n(B) = 2$

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

(iii) فرض کرو کہ پان کے پتّے کے نکالنے کا موقع C ہے

$\therefore n(C) = 13$

لہٰذا

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

(iv) فرض کرو کہ ڈائمنڈ 10 کے کارڈ کے نکالنے کا موقع D ہے

$\therefore n(D) = 1$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{52}.$$

مثال 12.7

35 طلباء کی ایک جماعت میں 20 لڑکے اور 15 لڑکیاں ہیں۔ان میں ایک طالب علم کا انتخاب کیا جائے تو امکان معلوم کرو کہ وہ (i) لڑکا ہے (ii) لڑکی ہے۔

حل : فرض کرو لڑکا اور لڑکی کے انتخاب کرنے کا موقع بالترتیب B اور G ہے۔

فرض کرو کہ تجربہ کا نظیری عرصہ S ہے

$\therefore$ $n(S) = 35$ ، $n(B) = 20$ اور $n(G) = 15$

(i) لڑکے کے انتخاب کرنے کا امکان

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{35}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{7}.$$

(ii) لڑکی کے انتخاب کرنے کا امکان

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{15}{35}$$

$$\Rightarrow P(G) = \frac{3}{7}.$$

مثال 12.8

ایک مخصوص دن میں برسات ہونے کا امکان 0.76 ہے اُس دن برسات نہ ہونے کا امکان معلوم کرو۔

حل :

فرض کرو برسات کے ہونے کا موقع A ہے۔ $\therefore$ برسات کے نہ ہونے کا موقع $\overline{A}$ ہے۔

دیا گیا ہے $P(A) = 0.76.$

$\because P(A) + P(\overline{A}) = 1$ $\quad P(\overline{A}) = 1 - 0.76 = 0.24.$

$\therefore$ برسات کے نہ ہونے کا امکان 0.24 ہے

مثال 12.9

کسی تھیلی میں 5 سرخ گیندیں اور چند نیلی گیندیں ہیں۔ اگر تھیلی سے ایک نیلی گیند کے اٹھانے کا امکان، سرخ گیند کے اٹھانے کے امکان کا تگنا ہو تو تھیلی میں نیلی گیندوں کی تعداد معلوم کرو۔

حل :

فرض کرو نیلی گیندوں کی تعداد x ہے

$n(S) = 5 + x$, $\therefore$ کل گیندوں کی تعداد

فرض کرو نیلی گیند کے اٹھانے کا موقع B اور سرخ گیند کے اٹھانے کا موقع R ہے۔

دیا گیا ہے

$$P(B) = 3P(R)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(B)}{n(S)} = 3\frac{n(R)}{n(S)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{5+x} = 3\left(\frac{5}{5+x}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = 15$$

لہٰذا نیلی گیندوں کی تعداد = 15

مثال 12.10

ذیل کے امکان معلوم کرو

(i) بغیر تخصیص کے منتخب شدہ لیپ سال میں 53 جمعہ ہوں۔

(ii) بغیر تخصیص کے منتخب شدہ لیپ سال میں صرف 52 جمعہ ہوں۔

(iii) بغیر تخصیص کے منتخب شدہ غیر لیپ سال میں 53 جمعہ ہوں۔

حل :

2 دن اور ہفتے 52 یا دن 366 = لیپ سال میں دنوں کی تعداد اب 52 ہفتوں میں 52 جمعہ ہوں گے اور باقی کے دو دنوں میں 7 ممکنات ہیں۔

(اتوار، پیر)، (پیر، منگل)، (منگل، چہارشنبہ)، (چہارشنبہ، جمعرات)، (جمعرات، جمعہ)، (جمعہ، ہفتہ)، (ہفتہ، اتوار)

ایک لیپ سال میں 53 جمعہ حاصل ہونے کا امکان اور مندرجہ بالا 7 ممکنات میں سے ایک جمعہ کا حاصل ہونے کا امکان دونوں مساوی ہیں۔ یہاں

S ={ (اتوار،پیر)، (پیر،منگل)، (منگل،چہارشنبہ)، (چہارشنبہ،جمعرات)، (جمعرات،جمعہ)، (جمعہ،ہفتہ)، (ہفتہ،اتوار)}

$$n(S) = 7$$

فرض کرو باقی دو دنوں میں ایک جمعہ کے حاصل ہونے موقع A ہے لہٰذا A = {(ہفتہ،جمعہ)،(جمعہ،جمعرات)}

$$n(A) = 2$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$$

(ii) اگر لیپ سال میں صرف 52 جمعہ حاصل ہونا ہے تو باقی دو دنوں میں کوئی جمعہ نہ ہوں

فرض کرو باقی دو دنوں میں جمعہ نہ ہونے کا امکان B ہے

B = {(اتوار،پیر)، (پیر،منگل)، (منگل،چہارشنبہ)، (چہارشنبہ،جمعرات)، (ہفتہ،اتوار)}

$$n(B) = 5$$

اب

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{7}.$$

نوٹ کیجئے کہ A اور B متمّم مواقع ہیں۔

(iii) 52 ہفتے اور 1 دن یا دن 365 = غیر لیپ سال میں دنوں کی تعداد غیر لیپ سال میں 53 جمعہ ہوں تو 7 ممکنات میں سے ایک جمعہ ہوسکتا ہے : اتوار، پیر، منگل، چہارشنبہ، جمعرات، جمعہ

یہاں، S = {اتوار، پیر، منگل، چہارشنبہ، جمعرات، جمعہ، ہفتہ }

$$n(S)=7$$

فرض کرو باقی دنوں میں جمعہ کے حاصل ہونے کا موقع C ہے

$$C = \{Fri\} \implies n(C) = 1.$$

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{7}.$$

مثال 12.11

اگر ایک سریعی تجربہ کا ایک موقع A ہے، اسطرح کہ $P(A):P(\overline{A})=7:12$، تب P (A) معلوم کرو

حل : دیا گیا ہے کہ : $P(A):P(\overline{A})=7:12$

فرض کرو کہ $P(A) = 7K$ اور $P(A) = 12\,k$ ، $k > 0$ ؛

ہم جانتے ہیں کہ $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

تو $7k + 12\,k = 1 \implies 19k = 1.$

لہٰذا $k = \frac{1}{19}$

چنانچہ $\therefore \quad P(A) = 7k = \frac{7}{19}.$

متبادل طریقہ

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{7}{12}$$

$$12\,P(A) = 7 \times P(\overline{A})$$

$$= 7\,[1 - P(A)]$$

$$19\,P(A) = 7$$

لہٰذا $P(A) = \frac{7}{19}$

مشق 12.1

(1) 100 ٹکٹوں (tickets) رکھنے والی ایک تھیلی میں سے ایک ٹکٹ نکالی جاتی ہے۔ٹکٹوں کے نمبر ایک تا سَو دیئے گئے ہیں۔اُس ٹکٹ کے حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو جو 10 سے تقسیم پذیر ہو۔

(2) ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکا جاتا ہے۔حاصلِ جمع 9 ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(3) دو پانسے بیک وقت پھینکے جاتے ہیں۔حاصل ہونے والے امداد میں سے جو دو ہندسی اعداد بنتے ہے، ان میں 3 سے تقسیم پذیر اعداد کا امکان معلوم کرو۔

(4) 12 اچھے انڈوں میں 3 گندے انڈے بھی شامل ہیں۔ایک انڈے کو بغیر تخصیص کے اٹھایا جاتا ہے۔اس کے گندے ہونے کا امکان کیا ہے ؟

(5) دو سکّے بیک وقت اچھالے جاتے ہیں۔زیادہ سے زیادہ ایک سَر کے حاصل ہونے کا امکان کیا ہے ؟

(6) اچھی طرح الٹ پھیر کئے ہوئے تاش کے پتوں سے ایک پتا بغیر تخصیص کے نکالا جاتا ہے اس بات کا کیا امکان ہے کہ وہ
(i) ایک ڈائمنڈ (ii) ڈائمنڈ نہیں (iii) اِکّا (ace) نہ ہو

(7) تین سکّوں کو بیک وقت پھینکا جاتا ہے۔ذیل کے حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو
(i) کم از کم ایک سَر (ii) ٹھیک دو پشت (iii) کم از کم دو سَر

(8) ایک تھیلی میں 6 سفید گیند ہیں جن کو 1 تا 6 نمبر مارک کئے گئے ہیں۔اور 4 سرخ گیند ہیں جن کو 7 تا 10 نمبر مارک کئے گئے ہیں۔ایک گیند بغیر تخصیص کے اٹھائی جاتی ہے۔اس کا کیا امکان ہے کہ حاصل ہونے والی گیند
(i) جفت عدد والی گیند (ii) سفید گیند ہو

(9) 1 تا 100 سالم اعداد میں سے ایک عدد کا انتخاب کیا جاتا ہے۔اس کا کیا امکان ہے کہ وہ
(i) کامل مربع ہو (ii) کامل مکعب نہ ہو

(10) تفریحی سفر کے لئے ایک سیاح ارجنٹینا، بنگلا دیش، چین، انگولا، روس اور الجیریا کا انتخاب بغیر تخصیص کے کرتا ہے۔اِس کا کیا امکان ہے کہ منتخب شدہ ملک کا نام ''الف'' سے شروع ہو۔

(11) کسی صندوق میں 4 سبز، 5 نیلے اور 3 سرخ گیندیں موجود ہیں۔بغیر تخصیص کے ایک گیند نکالی جاتی ہے۔اس بات کا کیا امکان ہے کہ منتخب شدہ گیند (i) سرخ رنگ کی ہو (ii) سبز رنگ کی نہ ہو

(12) 20 کارڈ (cards) کو 1 تا 20 اعداد دئے گئے ہیں۔ایک کارڈ بغیر تخصیص کے نکالی جاتی ہے۔اس کا کیا امکان ہے کہ کارڈ پر کا عدد (i) 4 کا ضعف ہو (ii) 6 کا ضعف نہ ہو

(13) 3 ، 5 اور 7 کے ہندسوں سے ایک دو ہندسی اعداد ترتیب دئے جاتے ہیں۔اس طرح بنے والے اعداد کا 57 سے زیادہ ہونے کا امکان معلوم کرو۔ (اعداد کو دہرانے کی اجازت نہیں ہے)

(14) تین پانسوں کو بیک وقت پھینکا جاتا ہے۔تینوں پانسوں پر مساوی عدد حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(15) دو پانسوں کو پھینکا جاتا ہے۔حاصل ہونے والے نتائج کا حاصلِ ضرب معلوم کیا جاتا ہے۔حاصلِ ضرب کے مفرد عدد (Prime Number) ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(16) ایک مرتبان (jar) میں 54 گولیاں ہیں جو نیلے، سبز اور سفید ہیں۔نیلی گولی کے نکالے جانے کا امکان $\frac{1}{3}$ اور سبز گولی کا امکان $\frac{4}{9}$ ہے۔بتاؤ جار میں سفید گولیوں کی تعداد کیا ہے ؟

(17) کسی تھیلی میں 100 قمیصیں موجود ہیں۔ان میں 88 اچھے ہیں۔8 میں معمولی خامی ہے اور 4 میں زیادہ خامی ہے۔تاجر A صرف اچھے قمیصوں کو قبول کرتا ہے اور تاجر B زیادہ خامی والے قمیص قبول نہیں کرتا ہے۔ایک قمیص بغیر تخصیص کے نکالی جاتی ہیں۔ اس کا کیا امکان ہے کہ (i) A (ii) B قبول کرے گا۔

(18) ایک تھیلی میں 12 گیندیں موجود ہیں جن میں 'x' سفید ہیں۔(i) اگر ایک گیند اٹھائی جائے تو اس کے سفید ہونے کا امکان کیا ہے؟

(ii) اگر تھیلی میں 6 مزید سفید گولیاں ڈال دی جائیں اور ایک سفید گولی کے حاصل ہونے کا امکان (i) کے امکان کا دُوگنا ہو جاتا ہے تو x معلوم کرو۔

(19) بچّوں کی ایک ہُنڈی میں 100 پچاس بیسوں کے سکّے، 50 ایک روپے کے سکّے، 20 دو روپیوں کے سکّے اور 10 پانچ روپیوں کے سکّے موجود ہیں۔ایک سکّہ کو بغیر تخصیص کے نکالا جاتا ہے۔اس کا کیا امکان ہے کہ حاصل شدہ سکّہ (i) 50 پیسے کا سکّہ ہو (ii) پانچ روپے کا سکّہ نہ ہو۔

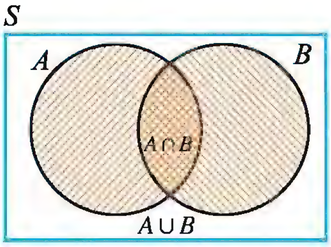


Fig. 12.5

امکان میں جمع کا مسئلہ (Addition theorem on probability)

فرض کرو A اور B کسی محدود، غیر معدوم مجموعہ S کے دو تحتی مجموعہ کے ہیں۔

تب
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

دونوں جانب n (S) سے تقسیم کیجیے۔ہمیں اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \qquad (1)$$

اگر تحتی مجموعے A اور B کسی سریعی تجربہ کے مواقع A اور B سے متعلق ہوں اور مجموعہ S نظری عرصہ S سے تعلق رکھتا ہو تو (1) اس طرح ہو جاتا ہے۔

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

اس نتیجہ کو **امکان میں جمع کا مسئلہ** کہا جاتا ہے۔

غور کریں

(i) موقعہ $A \cup B$ واقع ہوتا ہے اگر موقعہ A یا موقعہ B یا A اور B دونوں بیک وقت واقع ہوں۔

(ii) اگر A اور B ایک دوسرے کو خارج کرنے والے مواقع ہوں تو $A \cap B = \varnothing$ ہے۔

لہٰذا $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \because P(A \cap B) = 0.$

(iii) سٹ کے نظریہ کے تحت $A \cap \overline{B}$ اور A\B دونوں برابر ہیں۔

نتائج (بغیر ثبوت کے)

(i) اگر A ، B اور C نظیری عرصے S سے تعلق رکھنے والے تین مواقع ہوں تو

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

(ii) اگر A_1, A_2 اور A_3 ایک دوسرے کو خارج کرنے والے تین مواقع ہوں تو

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

(iii) اگر $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ایک دوسرے کو خارج کرنے والے مواقع ہوں تو

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n).$$

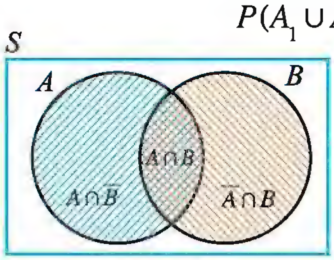


Fig. 12.6

(iv) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$,

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

جہاں $A \cap \overline{B}$ کا مطلب صرف A ہے اور B نہیں ہے

اسی طرح $\overline{A} \cap B$ کا مطلب صرف B ہے اور A نہیں ہے۔

مثال 12.12

تین سکّوں کو بیک وقت اچھالا جاتا ہے۔امکان میں جمع کا مسئلہ کا استعمال کرتے ہوئے اس بات کا امکان معلوم کرو کہ ٹھیک دو پشت حاصل ہوں یا کم از کم ایک سَر حاصل ہو۔

حل : نظیری عرصہ $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH\}.$

لہٰذا $n(S) = 8$

فرض کرو ٹھیک دو پشت حاصل ہونے کا موقع A ہے

$A = \{HTT, TTH, THT\}$ اور اسطرح $n(A) = 3$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}.$$

فرض کرو کم از کم ایک سَر حاصل ہونے کا موقع B ہے

$B = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$ اور اسطرح $n(B) = 7.$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}.$$

مواقع A اور B ایک دوسرے کو خارج کرنے والے نہیں ہیں

چونکہ $A \cap B = A, \quad P(A \cap B) = P(A) = \frac{3}{8}.$

$$\therefore \; P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}.$$

غور کریں

اوپر کے حساب میں ہم نے **امکان کے جمع کا نظریہ** استعمال کیا تھا۔جب کہ یہ غور کیا جاسکتا ہے کہ $A \cup B = B$،

لہٰذا $P(A \cup B) = P(B) = \frac{7}{8}$

مثال 12.13

ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکا جاتا ہے۔ کم از کم ایک مرتبہ اچھالنے پر عدد 5 کے حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو (جمع کا مسئلہ استعمال کرو)

حل :

ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکے جانے پر نظیری عرصہ $n(S) = 36$

فرض کرو پہلی مرتبہ اچھالنے پر 5 حاصل ہونے کا موقع A ہے

$$\therefore \qquad A = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}.$$

لہٰذا $\quad n(A) = 6, \qquad P(A) = \frac{6}{36}.$

فرض کرو دوسری مرتبہ اچھالنے پر 5 حاصل ہونے کا موقع B ہے

$$\therefore \qquad B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}.$$

لہٰذا $\quad n(B) = 6 \qquad P(B) = \frac{6}{36}.$

A اور B ایک دوسرے کو خارج کرنے والے مواقع نہیں ہیں، کیونکہ $A \cap B = \{(5,5)\}$ ہے

$$\therefore \qquad n(A \cap B) = 1 \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

$\therefore$ جمع کے مسئلہ کے تحت

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

مثال 12.14

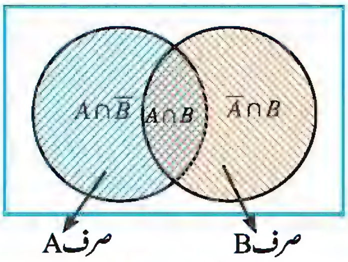


Fig. 12.7

کسی میڈیکل کالج میں ایک لڑکی کے داخلہ کا امکان 0.16 ہے۔ اس کے انجینئرنگ کالج میں داخلہ کا امکان 0.24 ہے۔ اس کے دونوں کالجوں میں داخلہ کا امکان 0.11 ہے۔

(i) اس کا امکان کیا ہے کہ وہ کم از کم ایک کالج میں داخلہ لے گی۔

(ii) اس کا کیا امکان ہے کہ وہ صرف میڈیکل کالج یا انجینئرنگ کالج میں داخلہ لے گی۔

حل :

فرض کرو میڈیکل کالج میں داخلے کا امکان A ہے اور انجینئرنگ کالج میں داخلے کا امکان B ہے

(i) $\quad P(A) = 0.16, \qquad P(B) = 0.24 \qquad P(A \cap B) = 0.11$

P (دو کالجوں میں سے کم از کم کسی ایک میں داخلہ) اس طرح ہے

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.16 + 0.24 - 0.11 = 0.29.$$

(ii) (دو کالجوں میں سے صرف ایک میں داخلہ) P اس طرح ہے

= P (صرف A یا صرف B)

$= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$

$= (0.16 - 0.11) + (0.24 - 0.11) = 0.18$

مثال 12.15

لفظ "ENTERTAINMENT" میں بغیر تخصیص کے ایک حرف کا انتخاب کیا جاتا ہے۔ امکان معلوم کیجئے کہ وہ حرفِ علّت (Vowel) یا T ہو۔ (حروف کے دہرانے کی اجازت ہے)

حل : لفظ "ENTERTAINMENT" میں 13 حروف ہیں۔

$n(S) = 13$

فرض کرو حرفِ علت حاصل ہونے کا موقع A ہے

$\therefore \quad n(A) = 5.$

لہٰذا $\quad P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{13}.$

فرض کرو حروف T کے حاصل ہونے کا موقع B ہے

$\therefore \quad n(B) = 3$

لہٰذا $\quad P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{13}$

$\because$ A اور B باہم اخراج کرنے والے واقع ہیں $\quad P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

$= \dfrac{5}{13} + \dfrac{3}{13} = \dfrac{8}{13}.$

مثال 12.16

فرض کرو A ، B اور C تین باہم اخراج اور مکمل مواقع ہوں اس طرح کہ $P(B) = \frac{3}{2}P(A)$ اور $P(C) = \frac{1}{2}P(B)$ ہے۔ P(A) معلوم کرو۔

حل :

فرض کرو $\quad P(A) = p$

اب $\quad P(B) = \dfrac{3}{2}P(A) = \dfrac{3}{2}p.$

اسی طرح $\quad P(C) = \dfrac{1}{2}P(B) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}p\right) = \dfrac{3}{4}p$

دیا گیا ہے کہ A ، B اور C باہم اخراج اور مکمّل مواقع ہیں

یہاں پر $\quad \therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ and $S = A \cup B \cup C$

$P(S) = 1.$

یعنی $\quad P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$$\Longrightarrow \quad p + \frac{3}{2}p + \frac{3}{4}p = 1$$

$$\Longrightarrow \quad 4p + 6p + 3p = 4$$

$$p = \frac{4}{13}.$$

لہٰذا $\quad P(A) = \frac{4}{13}.$

مثال 12.17

تاش کی گڈی سے جس میں 52 پتے ہیں، ایک پتا نکالا جاتا ہے۔امکان معلوم کرو کہ وہ راجہ یا دل یا سرخ پتا ہو۔

حل :

فرض کرو راجہ، دل اور سرخ پتے کے حاصل ہونے کے مواقع بالترتیب A اور B اور C ہیں

یہاں پر $\quad n(S) = 52,\ n(A) = 4,\ n(B) = 13,\ n(C) = 26.$

اور $\quad n(A \cap B) = 1,\ n(B \cap C) = 13,\ n(C \cap A) = 2$ and $n(A \cap B \cap C) = 1.$

$$\therefore\ P(A) = \frac{4}{52},\ P(B) = \frac{13}{52},\ P(C) = \frac{26}{52}.$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{52},\ P(B \cap C) = \frac{13}{52},\ P(C \cap A) = \frac{2}{52}$ اور $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{52}.$

اب $\quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{26}{52} - + \frac{1}{52} \quad \frac{13}{52} \quad \frac{2}{52} \quad \frac{1}{52} = \frac{44-16}{52}$$

$$= \frac{7}{13}.$$

مثال 12.18

کسی تھیلی میں 10 سفید، 5 کالی، 3 سبز اور 2 سرخ گیندیں ہیں۔بغیر تخصیص کے ایک گیند اٹھائی جاتی ہے۔اٹھائی جانے والی گیند کے سفید یا کالی یا سبز ہونے کا امکان معلوم کرو۔

حل : فرض کرو نظیری عرصہ S ہے

$$n(S) = 20$$

فرض کرو سفید، کالی یا سبز گیند کے حاصل ہونے کے مواقع بالترتیب W ، B اور G ہو۔

سفید گیند کے حاصل ہونے کا امکان $\quad P(W) = \frac{n(W)}{n(S)} = \frac{10}{20}.$

کالی گیند کے حاصل ہونے کا امکان $\quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{20}.$

سبز گیند کے حاصل ہونے کا امکان $\quad P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{3}{20}.$

$\therefore$ سفید یا کالی یا سبز گیند کے حاصل ہونے کا امکان

$P(W \cup B \cup G) = P(W) + P(B) + P(G)$ $\quad \because$ W، B اور G باہم اخراج کرنے والے مواقع ہیں

$$= \frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{9}{10}.$$

مشق 12.2

(1) اگر A اور B باہم اخراج کرنے والے مواقع ہوں اسطرح کہ $P(A) = \frac{3}{5}$ اور $P(B) = \frac{1}{5}$ ہوتو $P(A \cup B)$ معلوم کرو۔

(2) اگر A اور B دومواقع ہوں اسطرح کہ $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{5}$ اور $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ہوتو $P(A \cap B)$ معلوم کرو

(3) اگر $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{7}{10}, P(A \cup B) = 1$ ہوتو (i) $P(A \cap B)$ اور (ii) $P(A' \cup B')$ معلوم کرو۔

(4) اگر ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکا جاتا ہے تو پہلے پانسہ میں جفت عدد یا حاصلِ جمع 8 ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(5) سالم اعداد 1 تا 50 میں سے ایک عدد کا انتخاب کیا جاتا ہے۔اس کے 4 یا 6 سے تقسیم پذیری کا امکان معلوم کرو۔

(6) ایک تھیلی میں 50 بولٹ (bolts) اور 150 نٹ (nuts) ہیں۔ان میں آدھے بولٹ اور آدھے نٹ زنگ آلودہ ہیں۔ اگر ایک شئے اٹھائی جائے تو اس کا امکان کیا ہے کہ وہ زنگ آلودہ ہو یا وہ بولٹ ہو۔

(7) دو پانسوں کو بیک وقت لڑھکایا جاتا ہے۔ان کے چہروں پر ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصلِ جمع 3 یا 4 سے تقسیم پزیر نہ ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(8) ایک ٹوکری (basket) میں 20 سیب اور 10 سنترے موجود ہیں جن میں 5 سیب 3 سنترے سڑ چکے ہیں۔اگر ایک شخص بغیر تخصیص کے ایک پھل اٹھاتا ہے اس کا امکان کیا ہے کہ وہ سیب ہو یا اچھا پھل ہو۔

(9) کسی جماعت میں 40% طلباء ریاضی-کوئز میں حصہ لیتے ہیں، 30% طلباء سائنس کوئز میں حصہ لیتے ہیں اور 10% دونوں کوئز پروگراموں میں حصہ لیتے ہیں۔اگر بغیر تخصیص کے ایک طالبِ علم کا انتخاب کیا جائے تو اس کے ریاضی یا سائنس یا دونوں میں حصہ لینے کا امکان معلوم کرو۔

(10) اچھی طرح الٹ پھیر کئے ہوئے 52 پتوں کے تاش کی گڈی میں سے ایک پتا نکالا جاتا ہے۔اس کا امکان کیا ہے کہ وہ پان (spade) ہو یا راجہ ہو۔

(11) ایک صندوق میں 10 سفید، 6 سرخ اور 10 کالی گیندیں موجود ہیں۔ان میں سے ایک گیند اٹھائی جاتی ہے۔اس گیند کے سفید یا سرخ ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(12) 2, 5, 9 ہندسوں استعمال کر کے دو ہندسی اعداد ترتیب دئے جاتے ہیں۔(ہندسوں کے دہرانے کی اجازت ہے)۔اعداد کے 2 یا 5 سے تقسیم پذیری کا امکان معلوم کرو۔

(13) لفظ "ACCOMMODATION" کا ہر ایک حرف کاغذ کے ٹکڑوں پر لکھے جاتے ہیں اور تمام ٹکڑے ایک جار میں ڈالے جاتے ہیں۔اگر بغیر سوچے سمجھے ایک ٹکڑا اٹھایا جاتا ہے تو اس کا کیا امکان ہے کہ

(i) حرف 'A' یا 'O' منتخب ہو (ii) حرف 'M' یا 'C' منتخب ہو

(14) کسی کار کے نئے ڈیزائن پر انعام ملنے کا امکان 0.25 ہے، ایندھن کی کارکردگی پر انعام ملنے کا امکان 0.35 ہے۔ دونوں انعام ملنے کا امکان 0.15 ہے۔ اس کا امکان کیا ہے کہ

(i) دونوں میں سے کم از کم ایک انعام حاصل ہو۔ (ii) دونوں میں سے کسی ایک انعام حاصل ہو۔

(15) A ، B اور C کے ایک مسئلہ کو حل کرنے کا امکان بالترتیب $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ اور $\frac{3}{7}$ ہے۔ A اور B کے حل کرنے کا امکان $\frac{8}{15}$ اور C کے حل کرنے کا امکان $\frac{2}{7}$ ، A اور C کے حل کرنے کا امکان $\frac{12}{35}$ ہے۔ تینوں کے حل کرنے کا امکان $\frac{8}{35}$ ہے۔ اس مسئلہ کا کسی ایک سے حل ہو جانے کا امکان معلوم کرو۔

مشق 12.3

صحیح جواب کا انتخاب کرو۔

(1) اگر ϕ ایک ناممکن موقع ہو تو $= P(\phi)$

(A) 1 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

(2) اگر S ایک نظیری عرصہ ہو تو $p(S) =$

(A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

(3) اگر ایک موقع A کا امکان P ہو تو 'p' کی شرط پوری کرتا ہے

(A) $0 < p < 1$ (B) $0 \leq p \leq 1$ (C) $0 \leq p < 1$ (D) $0 < p \leq 1$

(4) فرض کرو A اور B دو مواقع ہیں اور جُڑا ہوا نظیری عرصہ S ہو تو $P(\overline{A} \cap B) =$

(A) $P(B) - P(A \cap B)$ (B) $P(A \cap B) - P(B)$

(C) $P(S)$ (D) $P[(A \cup B)']$

(5) ایک طالبِ علم کے ریاضی میں فی صد حاصل ہونے کا امکان $\frac{4}{5}$ ہے۔ اس کے فی صد نہ حاصل کرنے کا امکان

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(6) A اور B دو مواقع اس طرح ہیں کہ $P(A) = 0.25, P(B) = 0.05$ اور $P(A \cap B) = 0.14$ ہو تو $P(A \cup B) =$

(A) 0.61 (B) 0.16 (C) 0.14 (D) 0.6

(7) 20 اشیاء کے نمونہ (sample) میں 6 نقص والی اشیاء موجود ہیں۔ بغیر تخصیص کے ایک شئے اٹھائی جائے تو اس کے بغیر نقص والی یا نقص والی ہونے کا امکان

(A) $\frac{7}{10}$ (B) 0 (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{3}$

(8) اگر A اور B باہم اخراج کرنے والے مواقع ہوں اور S نظیری عرصہ ہو اس طرح کہ $P(A) = \frac{1}{3}P(B)$ اور $S = A \cup B$ ہو تو $P(A) =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

(9) تین باہم اخراج کرنے والا مواقع A ، B اور C کے امکان بالترتیب $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ اور $\frac{5}{12}$ ہوں تو $P(A \cup B \cup C)$

(A) $\frac{19}{12}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) 1

(10) اگر $P(A) = 0.25, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.14$ ہو تو P (B نہ اور A نہ) =

(A) 0.39 (B) 0.25 (C) 0.11 (D) 0.24

(11) ایک تھیلی میں 5 کالی گیندیں، 4 سفید گیندیں اور 3 سرخ گیندیں موجود ہیں۔ اگر ایک گیند کو بغیر تخصیص کے اٹھائی جائے اس کے سرخ نہ ہونے کا امکان

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{3}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

(12) دو پانسوں کو بیک وقت پھینکا جاتا ہے۔ اس کے جڑواں عدد ہونے کا امکان

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

(13) ایک غیر جانب دار سکّہ کو ایک مرتبہ پھینکا جاتا ہے۔ اسکے مفرد عدد (Prime Number) یا مرکب عدد (Composite Number) ہونے کا امکان

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

(14) ایک سکّہ کو تین مرتبہ اچھالنے پر 3 چہرے یا 3 پشت حاصل ہونے کا امکان

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

(15) 52 تاش کی گڈّی میں سے ایک کارڈ نکالا جاتا ہے۔ اس کے نہ اِکّا (ace) اور نہ راجہ ہونے کا امکان

(A) $\frac{2}{13}$ (B) $\frac{11}{13}$ (C) $\frac{4}{13}$ (D) $\frac{8}{13}$

(16) ایک لیپ سال میں 53 جمعہ یا 53 ہفتہ ہونے کا امکان

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

(17) ایک غیر لیپ سال میں 53 اتوار اور 53 پیر ہونے کا امکان

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) 0

(18) 52 پتوں کے تاش کی گڈی میں سے دلوں کی رانی (queen of hearts) کے حاصل ہونے کا امکان

(A) $\frac{1}{52}$ (B) $\frac{16}{52}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{1}{26}$

(19) یقینی موقع کا امکان

(A) 1 (B) 0 (C) 100 (D) 0.1

(20) بغیر تخصیص کے ایک کئے جانے والے تجربہ کا نتیجہ کامیاب یا ناکامی ہوسکتا ہے۔ اگر کامیابی کا امکان، ناکامی کے امکان سے دگنا ہو تو کامیابی کا امکان

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 0

جوابات

1۔ سٹ اور تفاعلات

مشق 1.1

2. (i) A (ii) ϕ 3. (i) {b, c} (ii) ϕ (iii) $\{a, e, f, s\}$

4. (i) {2, 4, 6, 7, 8, 9} (ii) {4, 6} (iii) {4, 6, 7, 8, 9}

10. {–5, –3, –2}, {–5, –3}, مربوطی خاصیت پائی نہیں جاتی

مشق 1.2

2. (i) سے (iv) تک کے لئے مختلف جوابات ممکن ہیں۔ اُن میں سے ایک جواب اس طرح سے ہے:

(i) $A' \cup (A \cap B)$ or $(A \backslash B)'$ (ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iii) $A \backslash (B \cup C)$ (iv) $(A \cap B) \backslash C$

5. (i) {12} (ii) {4, 8, 12, 20, 24, 28}

مشق 1.3

1. 300 2. 430 3. 35 5. 100 6. 30%

7. (i) 10 (ii) 25 (iii) 15 8. (i) 450 (ii) 3550 (iii)1850 9. 15

مشق 1.4

1. (i) تفاعل نہیں ہے (ii) تفاعل 2. علاقہ ={1, 2, 3, 4, 5}; حد ={1, 3, 5, 7, 9}

3. (i) ایک-ایک ہے اور بروں تفاعل نہیں ہے (ii) مستقل تفاعل (iii) ایک-ایک اور بروں تفاعل

4. (i) تفاعل نہیں ہے (ii) ایک-ایک تفاعل (iii) تفاعل نہیں ہے (iv) دوہرا تفاعل

5. $a = -2,\ b = -5,\ c = 8,\ d = -1$ 6. A-A سے میں f تفاعل نہیں ہے $\left\{-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}\right\}$ حد

7. ایک-ایک اور بروں تفاعل 8. (i)12 یا 14 (ii)13 یا 15 9. $a = 9,\ b = 15$

10. (i) $f = \{(5, -7), (6, -9), (7, -11), (8, -13)\}$

(ii) علاقہ $= \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$

(iii) حد $= \{-7, -9, -11, -13\}$ (iv) one-one function

11. (i) تفاعل ہے (ii) تفاعل ہے (iii) تفاعل نہیں ہے (iv) تفاعل نہیں ہے (v) تفاعل ہے

12.

x	–1	–3	–5	–4
$f(x)$	2	1	6	3

13. $\{(6,1), (9,2), (15,4), (18,5), (21,6)\}$

x	6	9	15	18	21
$f(x)$	1	2	4	5	6

14. $\{(4,3),(6,4),(8,5),(10,6)\}$

x	4	6	8	10
$f(x)$	3	4	5	6

15. (i) 5 (ii)16 (iii) –32 (iv) $\frac{2}{3}$ 16. (i) 23 (ii) 34 (iii) 2

مشق 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	A	A	B	A	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	D	A	D	D	B	A	C

2۔ حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے

مشق 2.1

1. (i) $-\frac{1}{3}, 0, 1$ (ii) $-27,\ 81,\ -243$ (iii) $-\frac{3}{4},\ 2,\ -\frac{15}{4}$

2. (i) $\frac{9}{17}, \frac{11}{21}$ (ii) –1536, 18432 (iii) 36, 78 (iv) –21,57

3. 378, $\frac{25}{313}$ 4. 195, 256 5. 1, 1, 1, 2, 3, 5 6. 2, 5, 15, 35, 75

مشق 2.2

1. A.P : 6, 11, 16, $\cdots$; $5n+1$ عام رقم 2. مشترک فرق –5, $t_{15} = 55$

3. $t_{29} = 3$ 4. $t_{12} = 23\sqrt{2}$ 5. $t_{17} = 84$ 6. (i) 27 رقمیں (ii) 34 رقمیں

8. $t_{27} = 109$ 9. $n = 10$ 10. 7 11. پہلا سال : 100, $t_{15} = 2200$

12. 2560 13. 10, 2, –6 or –6, 2, 10 14. 2, 6, 10 or 10, 6, 2 16. A.P., ₹91,500

مشق 2.3

1. (i) $r = 2$ میں G.P. (ii) $r = 5$ میں G.P. (iii) $r = \frac{2}{3}$ میں G.P.
(iv) $r = \frac{1}{12}$ میں G.P. (v) $r = \frac{1}{2}$ میں G.P. (vi) G.P. نہیں ہے

2. -2^7 3. 2, 6, 18, $\cdots$ 4. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ 5. (i) $n = 8$ (ii) $n = 11$ 6. $n = 5$

7. $r = 5$ 8. $r = \frac{5}{2}$ یا $\frac{2}{5}$; رقمیں : $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$. (or) $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$. 9. 18, 6, 2 (or) 2, 6, 18

10. 4, 2, 1 (یا) 1, 2, 4 11. 1,3,9, $\cdots$ (یا) 9,3,1, $\cdots$ 12. ₹$1000\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ 13. ₹$50{,}000 \times \left(\frac{55}{100}\right)^{15}$

مشق 2.4

1. (i) 2850 (ii) 7875 2. 1020 3. (i) 260 (ii) 375 4. (i) 1890 (ii) 50 5. –3240

6. $\frac{39}{11} + \frac{40}{11} + \frac{41}{11} + \cdots$ 7. 8 terms 8. 55350 9. 740 10. 7227 11. 36

12. 13995 13. 15 دن 14. A.P., ₹37,200 15. حسابی تواتر نہیں ہے

16. 156 times 20. 1225 اینٹیں

مشق 2.5

1. $s_{20} = \frac{15}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]$ 2. $s_{27} = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{27}\right]$ 3. (i) 765 (ii) $\frac{5}{2}(3^{12}-1)$

4. (i) $\frac{1-(0.1^{10})}{0.9}$ (ii) $\frac{10}{81}(10^{20}-1)-\frac{20}{9}$ 5. (i) $n = 6$ (ii) $n = 6$ 6. $\frac{75}{4}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{23}\right]$

7. $3+6+12+\cdots$ 8. (i) $\frac{70}{81}[10^n-1]-\frac{7n}{9}$ (ii) $1-\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$

9. $s_{15} = \frac{5(4^{15}-1)}{3}$ 10. دوسری پیشکش؛ آموں کی تعداد 1023 11. $r = 2$

مشق 2.6

1. (i) 1035 (ii) 4285 (iii) 2550 (iv) 17395 (v) 10630 (vi) 382500
2. (i) $k = 12$ (ii) $k = 9$ 3. 91 4. 29241 5. 3818cm^2 6. $201825cm^3$

مشق 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	D	D	A	B	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	B	D	A	B	B	A	C	A

3- الجبرا

مشق 3.1

1. $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ 2. $(1, 5)$ 3. $(3, 2)$ 4. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ 5. $(1, 5)$

6. $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ 7. $(2, 4)$ 8. $(2, 1)$ 9. $\left(5,\frac{1}{7}\right)$ 10. $(6, -4)$

مشق 3.2

1. (i) $(4, 3)$ (ii) $(0.4, 0.3)$ (iii) $(2, 3)$ (iv) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

2. (i) 23 , 7 (ii) ₹18,000 , ₹14,000 (iii) 42 (iv) ₹800 (v) 253cm^2 (vi) 720 km

مشق 3.3

1. (i) $4, -2$ (ii) $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ (iv) $0, -2$

   (v) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ (vi) $\frac{2}{3}, 1$ (vii) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) $-13,11$

2. (i) x^2-3x+1 (ii) x^2-2x+4 (iii) x^2+4 (iv) $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{5}$

   (v) $x^2-\frac{x}{3}+1$ (vi) $x^2-\frac{x}{2}-4$ (vii) $x^2-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$ (viii) $x^2-\sqrt{3}x+2$

مشق 3.4

1. (i) $x^2+2x-1, 4$ (ii) $3x^2-11x+40, \ -125$ (iii) $^2+x \ -2x, \ 2$

   (iv) $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9}, \ -\frac{50}{9}$ (v) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x+\frac{51}{32}, -\frac{211}{32}$

   (vi) $x^3-3x^2-8x+\frac{55}{2}, \ -\frac{41}{2}$

2. $a = -6, \ b = 11,$ بچت 5 3. $p = -2, \ q = 0,$ بچت -10

مشق 3.5

1. (i) $(x-1)(x+2)(x-3)$ (ii) $(x-1)(2x+3)(2x-1)$ (iii) $(x-1)(x-12)(x-10)$
(iv) $(x-1)(4x^2-x+6)$ (v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x+1)(x+2)(x+10)$
(vii) $(x-2)(x-3)(2x+1)$ (viii) $(x-1)(x^2+x-4)$ (ix) $(x-1)(x+1)(x-10)$
(x) $(x-1)(x+6)(2x+1)$ (xi) $(x-2)(x^2+3x+7)$ (xii) $(x+2)(x-3)(x-4)$

مشق 3.6

1. (i) $7x^2yz^3$ (ii) x^2y (iii) $5c^3$ (iv) $7xyz^2$
2. (i) $c-d$ (ii) $x-3a$ (iii) $m+3$ (iv) $x+11$ (v) $x+2y$
(vi) $2x+1$ (vii) $x-2$ (viii) $(x-1)(x^2+1)$ (ix) $4x^2(2x+1)$ (x) $(a-1)^3(a+3)^2$
3. (i) x^2-4x+3 (ii) $x+1$ (iii) $2(x^2+1)$ (iv) x^2+4

مشق 3.7

1. x^3y^2z 2. $12x^3y^3z$ 3. $a^2b^2c^2$ 4. $264a^4b^4c^4$ 5. a^{m+3}
6. $xy(x+y)$ 7. $6(a-1)^2(a+1)$ 8. $10xy(x+3y)(x-3y)(x^2-3xy+9y^2)$
9. $(x+4)^2(x-3)^3(x-1)$ 10. $420x^3(3x+y)^2(x-2y)(3x+1)$

مشق 3.8

1. (i) $(x-3)(x-2)(x+6)$ (ii) $(x^2+2x+3)(x^4+2x^2+x+2)$
(iii) $(2x^2+x-5)(x^3+8x^2+4x-21)$ (iv) $(x^3-5x-8)(2x^3-3x^2-9x+5)$
2. (i) $(x+1)(x+2)^2$ (ii) $(3x-7)^3(4x+5)$ (iii) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
(iv) $x(x+2)(5x+1)$ (v) $(x-2)(x-1)$ (vi) $2(x+1)(x+2)$

مشق 3.9

1. (i) $\dfrac{2x+3}{x-4}$ (ii) $\dfrac{1}{x^2-1}$ (iii) $(x-1)$ (iv) $\dfrac{x^2+3x+9}{x+3}$
(v) x^2-x+1 (vi) $\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}$ (vii) $\dfrac{x-1}{x+1}$ (viii) $(x+3)$
(ix) $\dfrac{(x-1)}{(x+1)}$ (x) 1 (xi) $\dfrac{(x+1)}{(2x-1)}$ (xii) $(x-2)$

مشق 3.10

1. (i) $3x$ (ii) $\dfrac{x+9}{x-2}$ (iii) $\dfrac{1}{x+4}$ (iv) $\dfrac{1}{x-1}$ (v) $\dfrac{2x+1}{x+2}$ (vi) 1
2. (i) $\dfrac{x-1}{x}$ (ii) $\dfrac{x-6}{x-7}$ (iii) $\dfrac{x+1}{x-5}$ (iv) $\dfrac{x-5}{x-11}$ (v) 1 (vi) $\dfrac{3x+1}{4(3x+4)}$ (vii) $\dfrac{x-1}{x+1}$

مشق 3.11

1. (i) x^2+2x+4 (ii) $\dfrac{2}{x+1}$ (iii) $\dfrac{2(x+4)}{x+3}$ (iv) $\dfrac{2}{x-5}$

(v) $\dfrac{x+1}{x-2}$ (vi) $\dfrac{4}{x+4}$ (vii) $\dfrac{2}{x+1}$ (viii) 0

2. $\dfrac{2x^3+2x^2+5}{x^2+2}$ 3. $\dfrac{5x^2-7x+6}{2x-1}$ 4. 1

مشق 3.12

1. (i) $14|a^3b^4c^5|$ (ii) $-17|(a\ -b)^2(b\ \ c)^3|$ (iii) $|x-11|$

(iv) $|x+y|$ (v) $\dfrac{11}{9}\left|\dfrac{x^2}{y}\right|$ (vi) $\dfrac{8}{5}\left|\dfrac{(a+b)^2(x-y)^4(b-c)^3}{(x+y)^2(a-b)^3(b+c)^5}\right|$

2. (i) $|4x-3|$ (ii) $|(x+5)(x-5)(x+3)|$ (iii) $|2x-3y-5z|$

(iv) $\left|x^2+\dfrac{1}{x^2}\right|$ (v) $|(2x+3)(3x-2)(2x+1)|$ (vi) $|(2x-1)(x-2)(3x+1)|$

مشق 3.13

1. (i) $|x^2-2x+3|$ (ii) $|2x^2+2x+1|$ (iii) $|3x^2-x+1|$ (iv) $|4x^2-3x+2|$

2. (i) $a=-42, b=49$ (ii) $a=12, b=9$ (iii) $a=49, b=-70$ (iv) $a=9,\ b=-12$

مشق 3.14

1. $\{-6,3\}$ 2. $\left\{-\frac{4}{3},3\right\}$ 3. $\left\{-\sqrt{5},\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ 4. $\left\{-\frac{3}{2},5\right\}$ 5. $\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$

6. $\left\{5,\frac{1}{5}\right\}$ 7. $\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$ 8. $\left\{\frac{1}{b^2},\frac{1}{a^2}\right\}$ 9. $\left\{-\frac{5}{2},3\right\}$ 10. $\left\{7,\frac{8}{3}\right\}$

مشق 3.15

1. (i) $\{-7,1\}$ (ii) $\left\{\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (iii) $\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$

(iv) $\left\{\dfrac{a-b}{2},-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right\}$ (v) $\{\sqrt{3},1\}$ (vi) $\{-1,3\}$

2. (i) $\{4,3\}$ (ii) $\left\{\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{2},2\right\}$ (iv) $\left\{-\dfrac{2b}{3a},\dfrac{b}{a}\right\}$

(v) $\left\{\dfrac{1}{a},a\right\}$ (vi) $\left\{\dfrac{a+b}{6},\dfrac{a-b}{6}\right\}$ (vii) $\dfrac{(9+\sqrt{769})}{8},\dfrac{(9-\sqrt{769})}{8}$ (viii) $\left\{-1,\dfrac{b^2}{a^2}\right\}$

مشق 3.16

1. 8 یا $\frac{1}{8}$ 2. 9 اور 6 3. 20 m, 5m or 10m, 10m 4. $\frac{3}{2}m$

5. 45km/hr 6. 5 km/hr 7. 49 سال , 7 سال 8. 24 cm 9. 12 days

10. پہلی ٹرین کی رفتار 20 کلومیٹر فی گھنٹہ دوسری ٹرین کی رفتار 15 کلومیٹر فی گھنٹہ

مشق 3.17

1. (i) حقیقی (ii) غیر حقیقی (iii) حقیقی اور مساوی (iv) حقیقی اور مساوی (v) غیر حقیقی (vi) حقیقی

2. (i) $\frac{25}{2}$ (ii) ± 3 (iii) -5 or 1 (iv) 0 or 3

مشق 3.18

1. (i) $6, 5$ (ii) $-\frac{r}{k}, p$ (iii) $\frac{5}{3}, 0$ (iv) $0, -\frac{25}{8}$

2. (i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (iii) $4x^2 - 16x + 9 = 0$

3. (i) $\frac{13}{6}$ (ii) $\pm\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{35}{18}$ 4. $\frac{4}{3}$

5. $4x^2 - 29x + 25 = 0$ 6. $x^2 + 3x + 2 = 0$ 7. $x^2 - 11x + 1 = 0$

8. (i) $x^2 - 6x + 3 = 0$ (ii) $27x^2 - 18x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 - 18x + 25 = 0$

9. $x^2 + 3x - 4 = 0$ 10. $k = -18$ 11. $a = \pm 24$ 12. $p = \pm 3\sqrt{5}$

مشق 3.19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	C	D	B	C	C	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	A	D	D	D	B	C
21	22	23	24	25					
D	A	C	C	A					

4۔ میٹرسس

مشق 4.1

1. $\begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 200 & 250 \\ 300 & 400 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 400 & 200 & 300 \\ 500 & 250 & 400 \end{pmatrix}$, 3×2, 2×3 2. $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

3. (i) 2×3 (ii) 3×1 (iii) 3×3 (iv) 1×3 (v) 4×2

4. $1 \times 8,\ 8 \times 1,\ 2 \times 4,\ 4 \times 2$

5. $1 \times 30, 30 \times 1, 2 \times 15, 15 \times 2, 3 \times 10, 10 \times 3, 5 \times 6, 6 \times 5, 10 \times 1, 1 \times 10, 15 \times 1, 1 \times 15$

6. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ مشق 7. (i) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

8. (i) 3×4 (ii) $4, 0$ (iii) دوسری صف اور تیسری قطار 9. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

مشق 4.2

1. $x = 2,\ y = -4,\ z = -1$ 2. $x = 4,\ y = -3$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 33 & -45 \end{pmatrix}$ 6. $a = 3,\ b = -4$

7. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{pmatrix}$ 8. $x = -3, -3,\ y = -1, 4$

11. $\begin{array}{cccccc} \text{TV} & \text{DVD} & \text{Video} & \text{CD} & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 55 & 27 & 20 & 16 \\ 72 & 30 & 25 & 27 \\ 47 & 33 & 18 & 22 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{store I} \\ \text{store II} \\ \text{storeIII} \end{array}$

12. $\begin{array}{cc} \text{بچے} & \text{بالغ} \end{array}$ $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{دوپہر دو بجے سے پہلے} \\ \text{دوپہر دو بجے کے بعد} \end{array}$

مشق 4.3

1. (i) 4×2 (ii) غیر واضح (iii) 3×5 (iv) 2×2

2. (i) (6) (ii) $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 1750 \\ 1600 \\ 1650 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{I day} \\ \text{II day} \\ \text{III day} \end{array}$ (5000) 4. $x = 3,\ y = 0$ 5. $x = 2,\ y = -5$

7. $AB = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 17 & 6 \end{pmatrix},\ AB \neq BA$ 11. $x = -3, 5$

مشق 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	D	B	D	B	C	C	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	B	C	B	A	C	B	D

5- کارتیسی علم ہندسہ

مشق 5.1

1. (i) $(-2, 1)$ (ii) $(0,2)$ 2. (i) $(5,-2)$ (ii) $(2, -1)$ 3. $(-12, 8)$

4 $(2, -2)$ 6. $(-24,-2)$ 7. $(-2, 3)$ 8. $(-6, -3)$ 9. $(-1, 0), (-4, 2)$

10. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$ 11. $4 : 7$ اندرونی طور پر

12. $5 : 2$ اندرونی طور پر $\left(0, \frac{17}{7}\right)$ 13. $\frac{\sqrt{130}}{2},\ \sqrt{13},\ \frac{\sqrt{130}}{2}$

5.2

1. (i) 3 sq. units (ii) 32 sq. units (iii) 19 sq. units

2. (i) $a = -3$ (ii) $a = \frac{13}{2}$ (iii) $a = 1, 3$

3. (i) ہم خط ہیں (ii) ہم خط نہیں ہیں (iii) ہم خط ہیں

4. (i) k = 1 (ii) k = 2 (iii) $k = \frac{7}{3}$

5. (i) 17 sq. units (ii) 43 sq. units (iii) 60.5 sq. units 7. 1 sq. units, 1 : 4

مشق 5.3

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 0° 2. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) غیرواضح

3. (i) 1 (ii) –2 (iii) 1 4. (i) 45° (ii) 30° (iii) $\tan\theta = \frac{b}{a}$

5. $-\frac{1}{2}$ 6.(i) 0 (ii) غیرواضح (iii) 1 7. $\sqrt{3}$, 0 10. $a = -1$

11. $b = 6$ 12. $-\frac{9}{10}$ 13. $\frac{11}{7}, -13, -\frac{1}{4}$ 14. $\frac{1}{12}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{2}$

مشق 5.4

1. $y = 5$, $y = -5$ 2. $y = -2$, $x = -5$ 3. (i) $3x + y - 4 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$

4. $x - 2y + 6 = 0$ 5.(i) میلان 1 , مقطوعہ-y 1 (ii) میلان $\frac{5}{3}$, مقطوعہ-y 0

(iii) میلان 2 , مقطوعہ-y $\frac{1}{2}$ (iv) میلان $-\frac{2}{3}$, مقطوعہ-y $-\frac{2}{5}$

6. (i) $4x + y - 6 = 0$ (ii) $2x - 3y - 22 = 0$ 7. $2x - 2\sqrt{3}y + (3\sqrt{3} - 7) = 0$

8. (i) $x - 5y + 27 = 0$ (ii) $x + y + 6 = 0$ 9. $6x + 5y - 2 = 0$

11. (i) $3x + 2y - 6 = 0$ (ii) $9x - 2y + 3 = 0$ (iii) $15x - 8y - 6 = 0$

12. (i) 3,5 (ii) –8, 16 (iii) $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}$, 13. $2x + 3y - 18 = 0$

14. $2x + y - 6 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ 15. $x - y - 8 = 0$

16. $x + 3y - 6 = 0$ 17. $2x + 3y - 12 = 0$ 18. $x + 2y - 10 = 0$, $6x + 11y - 66 = 0$

19. $x + y - 5 = 0$ 20. $3x - 2y + 4 = 0$

مشق 5.5

1. (i) $-\frac{3}{4}$ (ii) 7 (iii) $\frac{4}{5}$ 4. $a = 6$ 5. $a = 5$ 6. $p = 1,2$ 7. $h = \frac{22}{9}$

8. $3x - y - 5 = 0$ 9. $2x + y = 0$ 10. $2x + y - 5 = 0$ 11. $x + y - 2 = 0$

12. $5x + 3y + 8 = 0$ 13. $x + 3y - 7 = 0$ 14. $x - 3y + 6 = 0$

15. $x - 4y + 20 = 0$ 16. (3, 2) 17. 5 units 18. $x + 2y - 5 = 0$

19. $2x + 3y - 9 = 0$

مشق 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	D	A	B	D	A	D	C	C	B
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
C	C	C	D	B	B	D	A	A	B	B	

6- علم ہندسہ

مشق 6.1

1. (i)20cm (ii) 6cm (iii) 1 2. (i) No (ii) Yes 3. 7.5cm 4. 10.5cm
6. 12cm, 10cm 9. (i) 7.5cm (ii) 5.8cm (iii) 4 cm 10. (i) Yes (ii) No 11. 18 cm

مشق 6.2

1. (i) $x = 4\text{cm}$, $y = 9\text{cm}$ (ii) $x = 3.6\text{cm}$, $y = 2.4\text{cm}$, $z = 10\text{cm}$ (iii) $x = 8.4\text{cm}$, $y = 2.5\text{cm}$
2. 3.6m 3. 1.2m 4. 140m 6. 6cm 7. 64 cm^2 8. 166.25 cm
9. (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{55}{64}$ 10. 6.3 km^2 11. 72cm 12. 9m
13. (i) $\triangle XWY$, $\triangle YWZ$, $\triangle XYZ$ (ii) 4.8m

مشق 6.3

1. 65° 2. (i) 4 cm (ii) 12 cm 3. (i) 12 cm (ii) 12 cm 6. 30 cm

مشق 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	D	B	C	B	D	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	C	D	D	A	B	B	D	C

مشق

7- علم مثلث

مشق 7.1

1. (i) ہاں (ii) نہیں

مشق 7.2

1. 1.8m 2. 30° 3. نہیں 4. 174.7 m 5. 40 cm 6. Crow B
7. 5 6 m 8. 1912.40 m 9. $30\sqrt{2}$ m 10. 1.098 m 11. $19\sqrt{3}$ m
12. Yes 13. 87 m 14. 3 منٹ 15. 3464 km 16. 40 m
17. 60 m ; $40\sqrt{3}$ m 18. 90m

مشق 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	A	A	B	A	A	C	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	A	D	C	C	D	B	B	D

8۔ مساحت

مشق 8.1

1. $704\ cm^2$, $1936\ cm^2$
2. $h = 8$ cm, $352 cm^2$
3. $h = 40$ cm, $d = 35$ cm
4. ₹ 2640
5. $r = 3.5$ cm, $h = 7$ cm
6. $h = 28$ cm
7. $C_1 : C_2 = 5 : 2$
8. $612\pi cm^2$
9. $3168\ cm^2$
10. $550\ cm^2$, $704\ cm^2$
11. $h = 15\sqrt{3}$ cm, $l = 30$ cm
12. $1416\ cm^2$
13. $23.1\ m^2$
14. 10.5 cm
15. $301\frac{5}{7} cm^2$
16. 2.8 cm
17. $4158 cm^2$
18. $C_1 : C_2 = 9 : 25$, $T_1 : T_2 = 9 : 25$
19. $44.1\pi\ cm^2$, $57.33\ \pi\ cm^2$
20. ₹ 246.40

مشق 8.2

1. $18480\ cm^3$
2. 38.5 لٹر
3. $4620\ cm^3$
4. $r = 2.1$ cm
5. $V_1 : V_2 = 20:27$
6. 10 cm
7. $4158\ cm^3$
8. $7.04\ cm^3$
9. $8800 cm^3$
10. $616 cm^3$
11. 5cm
12. $1408.6\ cm^3$. 314
13. $\frac{2}{7} cm^3$
14. $2\sqrt{13}$ cm
15. 8 cm
16. 2.29 Kg
17. $3050\frac{2}{3} cm^3$
18. $288\pi cm^2$
19. $718\frac{2}{3} cm^3$
20. 1: 8

مشق 8.3

1. $11.88\pi cm^2$
2. $7623 cm^3$
3. $220 mm^2$
4. 1034 sq.m
5. 12 cm
6. 12.8 km
7. 2 cm
8. 1 cm
9. 1386 لٹر
10. 3 hrs. 12 mins.
11. 16 cm
12. 16 cm
13. 750 سیسہ کے چھرّے
14. 10 ٹکڑوں
15. 70 cm
16. $r = 36$ cm, $l = 12\sqrt{13}$ cm
17. 11m

مشق 8.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	C	A	A	B	C	A	B	D	C	C
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
D	D	B	D	B	C	B	D	A	D	C

10۔ ترسیمات

مشق 10.1

2. (i) $\{-2, 2\}$ (ii) $\{-2, 5\}$ (iii) $\{5, 1\}$ (iv) $\{-\frac{1}{2}, 3\}$
3. $\{-1, 5\}$
4. $\{-2, 3\}$
5. $\{-2.5, 2\}$
6. $\{-3, 5\}$
7. حل نہیں ہے

مشق 10.2

1. 120 kms
2. (i) ₹105 (ii) 11 note books
3. (i) $y = 8$ (ii) $x = 6$
4. (i) $k = 15$ (ii) ₹ 45
5. $y = 4; x = 2$
6. 24 days

11۔ شماریات

مشق 11.1

1. (i) 36, 0.44 (ii) 44, 0.64 2. 71 3. 3.38 kg 4. $2\sqrt{5}$, 20 5. 3.74

6. (i) 5.97 (ii) 4.69 7. 1.107 8. 6.32 9. 15.08

10. 54.19 11. 36.76, 6.06 12. 416, 20. 39 13. 4800, 240400 14. 10.2, 1.99

15. 25 16. 20.42 17. 12 18. 5.24 19. 1159, 70

20. A زیادہ مستقل پذیر ہے

مشق 11.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	B	D	C	C	B	A	D
11	12	13	14	15					
D	B	C	D	B					

12۔ امکان

مشق 12.1

1. $\frac{1}{10}$ 2. $\frac{1}{9}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{5}$ 5. $\frac{3}{4}$

6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{12}{13}$ 7. (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$

8. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{5}$ 9. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{24}{25}$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}$

12. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{17}{20}$ 13. $\frac{1}{3}$ 14. $\frac{1}{36}$ 15. $\frac{1}{6}$ 16. 12

17. (i) $\frac{22}{25}$ (ii) $\frac{24}{25}$ 18. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) 3 19. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

مشق 12. 2

1. $\frac{4}{5}$ 2. $\frac{3}{20}$ 3. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ 4. $\frac{5}{9}$ 5. $\frac{8}{25}$

6. $\frac{5}{8}$ 7. $\frac{4}{9}$ 8. $\frac{9}{10}$ 9. $\frac{3}{5}$ 10. $\frac{4}{13}$

11. $\frac{8}{13}$ 12. $\frac{2}{3}$ 13. $\frac{5}{13}, \frac{4}{13}$ 14. (i) 0.45 (ii) 0.3 15. $\frac{101}{105}$

مشق 12. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	B	A	A	B	A	A	D	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	C	B	B	C	D	A	A	B

متفرق سوالات (امتحان کے لئے نہیں)

1) اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$ ہوتو ثابت کرو کہ $f(2x) = \frac{3f(x)+1}{f(x)+3}$.

2) x کی حقیقی قیمت کے لئے مساوات حل کرو : $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ (جواب : $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$)

3) x کی کن قیمتوں کے لئے $\log_{10} 2$ ، $\log_{10}(2^x - 1)$ اور $\log_{10}(2^x + 3)$ اِس ترتیب میں لینے سے ایک A.P بنتا ہے
(جواب : $x = \log_5 2$)

4) ایک G.P کی مشترک نسبت r ہے۔اس کی ابتدائی چار رقموں کا حاصلِ جمع 15 ہے اور ان کے مربعوں کا حاصلِ جمع 85 ہے۔
ثابت کرو کہ $14r^4 - 17r^3 - 17r^2 - 17r + 14 = 0$.

5) ثابت کرو کہ تواتر $\{b_n\}$ ایک G.P ہے اگر صرف اور صرف $b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}$, $n > 1$

6) چند اعداد دونوں حسابی سلسلے .... ,17, 21 اور .... ,16, 21 میں ظاہر ہوتے ہیں۔ان دونوں سلسلوں میں ظاہر ہوئے ابتدائی دس اعداد کا حاصلِ جمع تواتر۔

7) ثابت کرو کہ تواتر $\{a_n\}$ ایک A.P ہے اگر صرف اور صرف $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1$

8) ثابت کرو کہ $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

9) ثابت کرو کہ $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$.

10) اگر ہم ایک دو ہندسی عدد کو اس کے ہندسوں کے حاصلِ جمع سے تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں خارجِ قسمت 4 اور بچت 3 حاصل ہوتا ہے۔اگر اسی دو ہندسی عدد کو اس کے ہندسوں کے حاصلِ ضرب سے تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں خارجِ قسمت 3 اور بچت 5 حاصل ہوتا ہے۔دو ہندسی عدد معلوم کرو۔ (جواب : 23)

11) تمام دو ہندسی اعداد کا حاصلِ جمع معلوم کرو جن کو 4 سے تقسیم کرنے پر باقی 1 حاصل ہوتا ہے۔(جواب : 1210)

12) عبارت کو مختصر کرو $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \times \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$ (جواب : $\frac{1}{2bc}$)

13) دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا کوئی حقیقی جذر (Real root) نہیں ہے۔اور $a + b + c < 0$ ہے۔
عدد c کا نشان (sign) معلوم کرو۔ (اشارہ : اگر $x(x) = 0$ کوئی حقیقی جذر نہ ہو تو $f(x)$، تمام x کی قیمتوں کے لئے مساوی نشان (sign) رکھتا ہے۔)

14) تمام حقیقی اعداد x معلوم کرو اس طرح کہ $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x + 6} > 0$. (جواب : $x > 1$)

15) مساوات حل کرو : $1 + a + a^2 + \cdots + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ (جواب : $x = 15$)

16) محسوب کرو : $\frac{6x_1^2 x_2 - 4x_1^3 + 6x_1 x_2^2 - 4x_2^3}{3x_1^2 + 5x_1 x_2 + 3x_2^2}$ جہاں x_1 اور x_2 مساوات $x^2 - 5x + 2 = 0$ کے جذر ہیں
(Ans : $-\frac{320}{73}$)

17) متماثل کو حل کرو : $\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sec\alpha - 1}{\sin\alpha} = -1$

18) اونٹ کے ریوڑ میں سے ایک چوتھائی ایک جنگل میں دیکھا گیا۔ان کی تعداد کے جذر المربع کا ڈگنا پہاڑ پر چلا گیا اور باقی 15 اونٹ ایک ندی کے کناری دیکھے گئے۔اونٹوں کی جملہ تعداد معلوم کیجئے۔ (جواب:اونٹوں کی تعداد 36 ہے)

19) 30 کلومیٹر کا فاصلہ مساوی رفتار سے طے کرنے کے بعد ایک ریل گاڑی کے انجن میں خرابی پیدا ہوئی۔اس لئے اس کی رفتار کو کم کر کے اصلی رفتار کا 4/5 واں حصّہ کرنا پڑا۔اس کی وجہ سے ٹرین اپنی منزل کو 45 منٹ دیر سے پہنچی۔اگر خرابی مزید 18 کلومیٹر کا فاصلہ زیادہ طے کرنے کے بعد پیدا ہوئی ہوتی تو ٹرین 9 منٹ پہلے پہنچ گئی ہوتی۔ٹرین کی رفتار اور سفر کا فاصلہ معلوم کرو۔

(جواب : ٹرین کی رفتار 30/ گھنٹہ کلومیٹر اور سفر کا فاصلہ 120km ہے)

20) اگر $\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta = 1$ ہو تو ثابت کرو کہ $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$

21) اگر $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = l$ اور $\sec\theta - \cos\theta = m,$ ہو تو ثابت کرو کہ $l^2 m^2 (l^2 + m^2 + 3) = 1$

22) ایک پہاڑ کے دامن سے اس کی چوٹی کا زاویہ فراز $45°$ ہے۔زاویہ میلان $30°$ پر 1000 میٹر اوپر چڑھنے کے بعد زاویہ فراز $60°$ دکھائی دیتا ہو۔پہاڑ کی اونچائی معلوم کرو۔

23) ایک مربع کے مقابلے کے زاویوں کے راس $(3,4)$ اور $(1,-1)$ ہیں۔اس کے باقی زاویوں کے راس معلوم کرو۔

(جواب $\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$ and $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

24) ایک اضافہ ہوتی ہوئی G.P کی پہلی اور آخری رقموں کا مجموعہ 66 ہے۔اس کی دوسری اور آخر سے پہلے کے رقموں کا حاصلِ ضرب 128 ہے اور اس کے رقموں کا مجموعہ 126 ہے۔اس سلسلے میں کل کتنی رقمیں ہیں ؟ (جواب : 6)

25) ایک مینار اپنے قاعدہ کے سطح پر نقطہ A پر زاویہ بناتی ہے۔نقطہ A کے ٹھیک اوپر کی اونچائی سے مینار کے قدم کا زاویہ نشیب B ہے۔ثابت کرو کہ مینار کی اونچائی bcot tan ہے۔

26) ایک مستطیلی نما تالاب کی پیائش $40ft \times 20ft$ ہے۔اس کے اطراف ٹھیک 99 مکعب سمر کا کنکریٹ استعمال کر کے مساوی چوڑائی اور گہرائی کا حدِ فاصل (حاشیہ) بنانا ہے۔اگر حدِ فاصل کی گہرائی 3 انچ ہو تو اس کی چوڑائی معلوم کرو۔(جواب : 3 فٹ)

27) مختصر کرو $(1+\frac{2}{2})(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{4})\cdots(1+\frac{2}{n}).$ (جواب : $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$)

28) تین مدوّر تھالیاں اسطرح ہیں کہ ان میں دو کا نصف قطر r انچ اور تیسرے کا نصف 2r انچ ہے۔ان کو ایک سطح پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ایک تھالی کا حاشیہ دوسرے کے حاشیہ کو صرف ایک نقطع پر مَس کرتا ہے۔ان تھالیوں کے مرکز سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کرو۔

29) چھ مدوّر تھالیوں کے ہر ایک کا نصف قطر 8 انچ ہے۔ان کو زمین پر دائرہ نما شکل میں اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ساتویں تھالی دوسرے تمام چھ تھالیوں کو صرف ایک نقطے پر مس کرتی ہے۔اور ہر ایک تھالی دوسرے دو تھالیوں کو دونوں جانب ایک نقطع پر مَس کرتی ہے۔ان چھ تھالیوں سے مرکز میں بننے والے حصّہ کا رقبہ معلوم کرو۔ (جواب : $192\sqrt{3}$ مربع انچ)

30) 4 سمر نصف قطر اور 5 سمر اونچائی رکھنے والے ایک استوانہ نما لکڑے سے مساوی نصف قطر کے قاعدہ اور اونچائی 3 سمر کا ایک قائم مدوّر مخروط کاٹ کر نکال لیا جاتا ہے۔ثابت کرو کہ باقی لکڑے کا کل سطحی رقبہ $76\pi cm^2$ ہے۔

31) ثابت کرو کہ $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

جہاں $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ ہے۔

Bibliography

1. Peter J. Eccles, Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press 2007
2. Ann Xavier Gantert, Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications Inc., 2009
3. Boris A Kordemsky, The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations, Dover Publications
4. Imre Lakatos, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, January 1976
5. Krishnan Namboodiri, Richard G Niemi, Matrix Algebra, An Introduction, Sage Publications 1984
6. Alfred S Posamentier, Charles T Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications
7. Alfred S. Posamentier, Charles T Salkind, Challenging Problems in Algebra, Dover Publications
8. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson, College Algebra, Thomson Brooks/Cole, Jan 2010
9. Michael Sullivan, College Algebra, Pearson Publishing, January 2007
10. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html
11. V.Govorov, P.Dybov, N.Miroshin, S.Smirnova, Problems in Mathematics, G K Publications 2010
12. H.S.Hall, S.R. Knight, Elementary Algebra for Schools, Surjeet Publications 2007
13. H.S.Hall, S.R. Knight, Higher Algebra, A.I.T.B.S Publishers 2009
14. D. Dorokhin, Z.Plaksenko, G.Bazhora, Collection of Problems and Exercises in Mathematics, Mir Publications 1990

سوال کے پرچہ کا بنیادی خاکہ

سبق : حساب
جماعت : X

وقت 2:30 گھنٹے
مارکس : 100

سیکھنے کے مقاصد کی بنیاد پر مارکس کی اہمیت

مقاصد	فی صد
جاننا	19
سمجھنا	31
استعمال میں لانا	23
صلاحیت	27
جملہ	100

سوالوں کی قسموں کی بنیاد پر اہمیت

سوالوں کی قسمیں	سکشن-A بہت مختصر (VSA) معروضی سوالات	سکشن-B مختصر (SA)	سکشن-C طویل جوابات (LA)	سکشن-D طویل ترین جوابات (VLA)	جملہ
سوالوں کی تعداد	15	10	9	2	36
مارکس	15	20	45	20	100
وقت (منٹوں میں)	20	35	65	30	2.30 گھنٹے

مشکل کی سطح

سطح	نمبرات کا فیصد
مشکل	12
اوسط	28
آسان	60

حصے اور اختیارات

حصے	سوال نمبر		سوالوں کی تعداد	سوالوں کے جواب دینا ہے
	سے	تک		
A	1	15	15	15
B	16	30	16 30 واں سوال ضروری ہے اور وہ 'یا' کی قسم کا ہے۔	10
C	31	45	16 45واں ضروری ہے اور وہ بھی 'یا' کی قسم کا ہے۔	9
D	46		2 یہ سوال 'یا' کی قسم کا ہے۔	1
	47		2 یہ سوال 'یا' کی قسم کا ہے۔	1

متن کی بنیاد پر اہمیت

باب نمبر	باب	سوالوں کی تعداد				جملہ مارکس
		1 mark	2 marks	5 marks	10 marks	
1	1۔ سٹ اور تفاعلات	1	2	2		15
2	2۔ حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے	2	1	2		14
3	3۔ الجبرا	2	2	3		21
4	4۔ میٹریس	1	2	1		10
5	5۔ محددی علم ہندسہ	2	2	2		16
6	6۔ علم ہندسہ	2	1	1		9
7	7۔ علم مثلث	2	2	1		11
8	8۔ مساحت	1	2	2		15
9	9۔ عملی علم ہندسہ				2	20
10	10۔ ترسیمات				2	20
11	11۔ شماریات	1	1	1		8
12	12۔ امکان	1	1	1		8
Total		15	16	16	4	167

مثالیں، مشق اور بنائے گئے سوالات کی بنیاد پر مارکس اور سوالوں کی تقسیم

	حصہ-A (1 mark)	حصہ-B (2 marks)	حصہ-C (5 marks)	حصہ-D (10 marks)	جملہ نشانات	فیصد
نصابی کتاب میں دی گئی مثالوں میں سے	---	6 (2)	6 (5)	1 (10)	52	31
نصابی کتاب میں دئے گئے مشقوں میں سے	10 (1)	8 (2)	8 (5)	3 (10)	96	58
مخصوص ابواب سے بنائے گئے سوالات	5 (1)	2 (2)	2 (5)	---	19	11
جملہ	15 (1)	16 (2)	16 (5)	4 (10)	167	100

* قوسین میں موجود اعداد ہر سوال کے مارکس کو ظاہر کرتے ہیں۔

سکشن - A

1) تمام 15 سوالات متعدد انتخابی (معروضی) قسم کے ہیں۔اور تمام سوالات ضروری ہیں۔
2) 15 سوالات میں سے 10 سوالات درسی کتاب میں سے ہوں گے۔باقی 5 سوالات 6, 5, 3, 2 اور 7 کے ہر باب سے ایک سوال درسی کتاب کے نتائج، مسئلے، مثالوں اور مشقوں پر مشتمل ہوں گے۔

سکشن - B

1) 16 سوالات میں سے 9 سوالات کے جوابات دینے ہوں گے۔
2) ابتدائی 14 سوالات سے 8 سوالات کے جوابات دینے ہوں گے۔سوال نمبر 30 ضروری ہے جو 'یا' کی قسم کا ہوگا۔
3) 14 سوالات کی ترتیب درسی کتاب کے بابوں کی ترتیب میں ہوگی۔
4) 14 سوالات میں سے 6 سوالات مثالوں میں سے اور 8 سوالات مشقوں میں سے ہوں گے۔
5) سوال نمبر 30 میں موجود 2 سوالات مثالوں اور مشق میں دئے ہوئے سوالات میں سے ہوں گے اور باب 5, 3, 2 اور 8 سے کسی دو مختلف ابواب میں سے ہوں گے۔

سکشن - C

1) 16 سوالات میں سے 9 سوالات کا جوابات دینے ہوں گے۔
2) ابتدائی 14 سوالات میں کسی 8 سوالات کے جوابات دینے ہوں گے۔سوال نمبر 45 ضروری ہے جو 'یا' کی قسم کا ہوگا۔
3) 14 سوالات کی ترتیب درسی کتاب کے ابواب کی ترتیب میں ہوگی۔
4) 14 سوالات میں سے 6 سوالات مثالوں میں سے اور 8 سوالات مشقوں میں سے ہوں گے۔
5) سوال نمبر 45 کے دو سوالات مثالوں اور مشقوں میں دئے ہوئے سوالات میں سے ہوں گے اور باب 5, 3, 2 اور 8 سے کسی ابواب میں سے ہوں گے
6) 30(a)، 30(b)، 45(a) اور 45(b) نمبر کے سوالات ابواب 5, 3, 2 اور 8 میں پائے جانے والے مثالوں اور مشقوں میں سے اس شرط پر کہ تمام سوالات مختلف ابواب میں سے ہوں گے۔

سکشن - D

1) اس حصے میں دو سوالات ہوں گے۔جو باب نمبر 9 اور 10 سے ہوں گے، جس میں سے ہر باب کا کوئی ایک سوال منتخب کرنا ہوگا۔
2) دونوں سوالات کا جواب لکھنا ہوگا اور ہر سوال میں سے کسی ایک کا انتخاب کرنا ہوگا۔
3) 4 سوالوں میں سے ایک سوال کتاب کی مثالوں میں سے ہوگا اور باقی تین سوالات مشقوں میں سے ہوں گے۔

بنیادی خاکہ - دسویں جماعت

مقصد \ باب	معلومات				سمجھنا				استعمال				صلاحیت				جملہ
	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	
1۔ سٹ اور تفاعلات	1 (1)	2 (1)	5 (1)			2 (1)					5 (1)						15
2۔ حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے		2 (1)	5 (1)		1 (1)				1 (1)		5 (1)						14
3۔ الجبرا		2 (1)	5 (1)		1 (1)				1 (1)	2 (1)	5 (1)				5(1)		21
4۔ میٹریس						4 (2)	5 (1)		1 (1)								10
5۔ محددی علم ہندسہ		2 (1)			1 (1)	2 (1)	5 (1)		1(1)		5 (1)						16
6۔ علم ہندسہ					1 (1)	2 (1)	5 (1)		1 (1)								9
7۔ علم مثلث					1 (1)	2 (1)	5 (1)		1 (1)	2 (1)							11
8۔ مساحت	1 (1)					2 (1)	5 (1)			2 (1)	5(1)						15
9۔ عملی علم ہندسہ																10 (2)	20
10۔ ترسیمات																10 (2)	20
11۔ شماریات			5 (1)			2 (1)			1(1)								8
12۔ امکان		2 (1)					5 (1)		1(1)								8
جملہ	2 (2)	10 (5)	20 (4)		5 (5)	16 (8)	30 (6)		8(8)	6(3)	25 (5)				5(1)	40 (4)	167

*قوسین میں دیئے گئے اعداد سوالوں کی تعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔

*دوسرے اعداد مارکس کو ظاہر کرتے ہیں۔